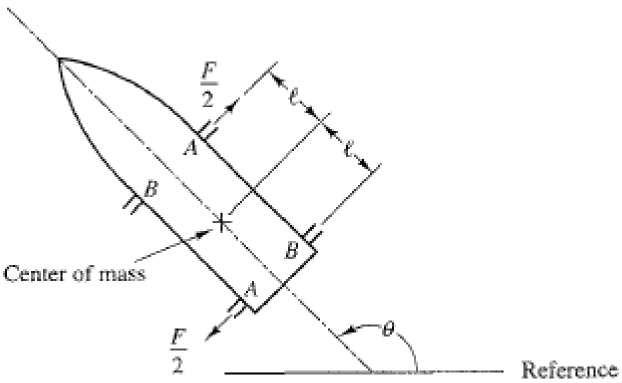
Deney No: 1

Birinci ve İkinci Dereceden Fiziksel Sistemlerin Matematiksel Modellenmesi

Bir sistemin analizin yapılabilmesi ve denetlenebilmesi için ilk olarak o sistemin matematiksel olarak gösteriminin yapılması gerekmektedir. Matematiksel olarak yapılan bu gösterime o fiziksel sistemin matematiksel modeli denir.

Fiziksel sistemlerin özelliklerine göre bazı modeller doğrusal ve zamanla değişmeyen (Linear Time Invariant-LTI) olabildiği gibi, bazı sistemler için ise doğrusal olmayan (Nonlinear) ve/veya zamanla değişen matematiksel modeller ile karşılaşılabilmektedir. Bu ders kapsamında kullanılacak sistemlerin büyük bir kısmı doğrusal-zamanla değişmeyen (LTI) sistemler olacaktır.



Şekil 1.1: Bir uydu davranış kontrol sisteminin şematik gösterimi

Fiziksel bir sistemin çıkışında hem geçici durumda hem de kalıcı durumda istenilen özelliklerde bir tepki elde edebilmek için yapılan işlemlerin tamamına o sistemin denetimi veya kontrolü adı verilir. Bu denetleme işleminin yapılabilmesi için sistemin matematiksel olarak modelinin doğru bir şekilde elde edilmesi esastır. Mekanik, elektrik, hidrolik, termodinamik, biyolojik vb. birçok sistemde modelleme öncelikli adımdır.

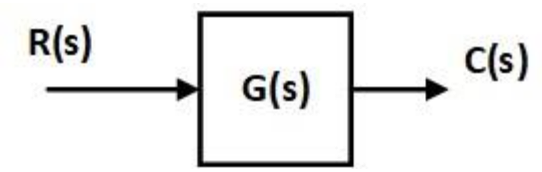
Fiziksel sistemlerin modellenmesinde ilk olarak sistemde bulunan bileşenlerin ve sistemin tamamının çalışma prensibinin anlaşılması gerekmektedir. Bunun devamında o sistem için temel olan denklemlerin ve analiz yöntemlerinin uygulanması ve formülize işlemleri yapılır. Temel prensiplerin uygulanması ile birlikte sistemin modelini tanımlayan cebirsel ve diferansiyel denklemler yazılır. Sistemin giriş/çıkış değişkenleri belirlenerek ve Laplace dönüşümü, Z-dönüşümü, Fourier dönüşümü gibi işlemleri kolaylaştıracak dönüşüm yöntemleri kullanarak modelleme işlemi tamamlanır.

Bir fiziksel sistem birden fazla biçimde matematiksel olarak gösterilebilir. Zaman düzlemi gösterimi, s veya z düzlemi gösterimleri, durum uzay gösterimi, transfer fonksiyonu gösterimi matematiksel gösterim çeşitlerinden bazılarıdır. Bunların dışında fiziksel sistemlere ait modeller blok diyagram veya sinyal akış diyagramları kullanılarak da gösterimleri gerçekleştirilebilir. Belirli bir sisteme ve özel koşullara bağlı olarak, bir matematiksel model diğer modellerden daha uygun olabilir. Örneğin, optimal kontrol problemlerinde durum-uzay gösterimlerinin kullanılması avantajlıdır. Öte yandan, tek girişli, tek çıkışlı, doğrusal, zamanla değişmeyen sistemlerin geçici-cevap ya da frekans-cevap analizi için, transfer fonksiyonu gösterimi, diğerlerinden daha uygun olabilir. Bir sistemin matematiksel bir modeli elde edildiğinde, analiz ve sentez amacıyla çeşitli analitik ve bilgisayar araçları kullanılabilir.

Kontrol teorisinde bir fiziksel sistemin gösterilmesinde giriş çıkış ilişkisini karakterize eden transfer fonksiyonu gösterimi oldukça yaygın olan bir gösterimdir. Diferansiyel denklemler ile gösterilen bir LTI sistemin transfer fonksiyonu tüm başlangıç koşullarının sıfır olduğu varsayımı ile çıkışın Laplace dönüşümünün (tepki fonksiyonu) girişin Laplace dönüşümüne oranı (sürüş fonksiyonu) olarak tanımlanır.

$$Transfer\ Fonksiyonu\ (TF) = G(s) = \left.\frac{L[çıkış]}{L[giriş]}\right|_{sıfır\ başlangıç\ koşulu}$$

Transfer fonksiyonu ve sistemin dürtü tepkisi arasında ise yine Laplace dönüşümü ile tanımlanacak bir ilişki bulunmaktadır.



Şekil 1.2: Blok Diyagram Gösterimi

Birim dürtünün s-düzleminde karşılığı $R(s) = 1$ olacağından, çıkış ifadesi doğrudan;

$$C(s) = G(s)$$

olarak ifade edilir. Bu durumda sistemin birim dürtü tepkisi ters Laplace dönüşümü kullanılarak

$$L^{-1}\{G(s)\} = g(t)$$

olur.

Şekil 1.1 de gösterilen bir uydunun davranışının kontrol edildiği sistem ele alınsın. Bu şematik gösterimde gerçekte 3 eksende kontrolün sağlanmasına rağmen burada sadece θ açısının kontrol edildiği anlaşılmaktadır. Sistemin girişinin uydunun motorlarından sağlanan tork, çıkışının ise θ olması durumu için sisteme ait transfer fonksiyonu oluşturulsun.

Transfer fonksiyonunu oluşturmak için,

i. Sisteme ait diferansiyel denklemler yazılır.
ii. Tüm başlangıç koşullarının sıfır olduğunu varsayarak diferansiyel denklemin Laplace dönüşümü alınır.
iii. $\frac{\theta(s)}{T(s)}$ oranı hesaplanır.

$$J\frac{d^2\theta}{dt^2} = T$$

Her iki tarafın Laplace dönüşümü alındığında,

$$Js^2\theta(s) = T(s)$$

ve buradan transfer fonksiyonu,

$$\frac{\theta(s)}{T(s)} = \frac{1}{Js^2}$$

olarak elde edilir. Burada J kütle merkezinde dönme ekseni etrafındaki atalet momentini göstermektedir.

Örnekten de anlaşıldığı gibi sistemlerin modellenmesinde ve transfer fonksiyonlarının elde edilmesinde, farklı girişler için sistemin ürettiği çıkışın zaman düzleminde analizinde Laplace Dönüşümü ve Ters Laplace Dönüşümü sıkça kullanılacaktır. Otomatik Kontrol dersi kapsamında Laplace Dönüşümü, Ters Laplace Dönüşümü ve Laplace Dönüşümünün özellikleri ayrıntılı olarak incelenmiştir. Temel fonksiyonların Laplace dönüşümleri ve özellikleri bu deney kapsamında da kullanılacaktır. Laplace ve ters Laplace dönüşümleri Matlab kullanılarak bulunabilmektedir. Bunun için aşağıda verilen kodları inceleyiniz.

Matlab programı 1-1	**Laplace Dönüşümü**
syms a s t w x F(t) f(t) = exp(-a*t); laplace(f(t)) ans = 1/(a + s)	% sembolik değişkenlerin tanımlanması % $f(t) = e^{a*t}$ % laplace dönüşümü

Matlab programı 1-2	**Ters Laplace Dönüşümü**
syms a s t w x F(t) F(s) = 1/(s+a) ilaplace(F(s)) ans = exp(-a*t)	% sembolik değişkenlerin tanımlanması % $F(s) = \frac{1}{s+a}$ % ters laplace dönüşümü

Ters Laplace dönüşümü alınırken kısmi kesirlere ayırma yönteminin kullanıldığını hatırlayınız. Eğer s-düzleminde verilen sistemin çıkışı karmaşık yapıda ise bu sistemin zaman düzlemindeki karşılığını bulmak için s-düzlemindeki sistem tepkisi kısmi kesirlere ayrılarak ters laplace dönüşümü uygulanmaktadır. Kısmi kesirlere ayırma işlemi "residue" komutu ile Matlab kullanılarak yapılabilmektedir. Bu komutun çıkışında Bunun için aşağıda verilen Matlab programı 1-3'ü inceleyiniz.

Matlab programı 1-3	Kısmi Kesirlere Ayırma

num = [2 5 3 6];
den = [1 6 11 6];
[r,p,k] = residue(num,den)
r = -6.0000
-4.0000
3.0000
 	
p =
 	
-3.0000
-2.0000
-1.0000
 	
k =
 	
2
	% $G(s) = \frac{2s^3+5s^2+3s+6}{s^3+6s^2+11s+6}$ transfer fonksiyonu

Burada r kısmi kesirlere ait katsayıları, p transfer fonksiyonunun kutuplarını, k ise bölme sonucu elde edilen değeri verir. Dikkat edilirse pay ve paydanın dereceleri eşit olduğundan, kısmi kesirlere ayırma işleminden önce bölme işlemi yapılması gereklidir. Kısmi kesirlere ayrıldıktan sonra transfer fonksiyonu;

$$G(s) = 2 + \frac{-6}{s+3} + \frac{-4}{s+2} + \frac{3}{s+1}$$

olarak elde edilir.

Ayrıca aşağıdaki kullanım ile fonksiyonun geri elde edilmesini ve yazdırılmasını inceleyiniz.

Matlab programı 1-4	Kısmi kesirler kullanılarak fonksiyonun yazdırılması
[num,den] = residue(r,p,k) num = 2.0000 5.0000 3.0000 6.0000 den = 1.0000 6.0000 11.0000 6.0000 printsys(num,den,'s')	% pay ve paydanın bulunması

num/den = 2 s^3 + 5 s^2 + 3 s + 6 ---------------------- s^3 + 6 s^2 + 11 s + 6	% s değişkeni kullanarak Num(s)/Den(s) biçiminde TF olarak yazdırma

Transfer Fonksiyonundan Kutup ve Sıfırların Matlab ile Bulunması:

Bir sistemin kutup ve sıfırları o sistemin zaman düzlemindeki davranışının belirlenmesinde son derece önemlidir. Sistemin kararlılığının yanında, kalıcı ve geçici durumdaki tepkisinin analizi sistemin kutupları ve sıfırları ile doğrudan ilişkilidir. Verilen bir transfer fonksiyonundan sistemin kutup ve sıfırlarının bulunması ve bir önceki Matlab kodunda olduğu gibi kutup, sıfır değerleri kullanılarak transfer fonksiyonunun geri elde edilmesi aşağıdaki örnekte gösterilmiştir.

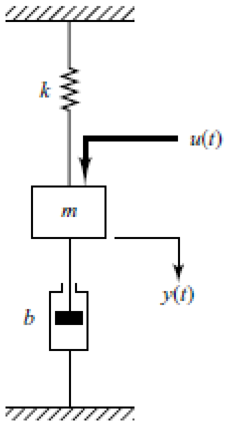
Matlab programı 1-5	Kutup Sıfırların Belirlenmesi

num = [0 0 4 16 12];
 den = [1 12 44 48 0];
 [z,p,K] = tf2zpk(num,den)
 z =
 -3
 -1
 p =
 0
 -6.0000
 -4.0000
 -2.0000
 K =
 4
	% pay ve paydanın belirlenmesi
	 % $G(s) = \frac{4s^2+16s+12}{s^4+12s^3+44s^2+48s}$
	 % z sistemin sıfırlarını, p kutuplarını ve K % kazanç değerini gösterir.

[num,den] = zp2tf(z,p,K)	% Sıfır, Kutup ve kazanç değeri % kullanarak sistemin transfer fonksiyonunu % elde etmek için
printsys(num,den,'s') num/den = 4 s^2 + 16 s + 12 --------------------------- s^4 + 12 s^3 + 44 s^2 + 48 s	% Sisteme ait transfer fonksiyonu

Durum Uzay Gösteriminin Matlab ile Elde Edilmesi

Şekil 1.3'te gösterilen mekanik sisteme ait durum uzay gösterimini yapabilmek için ilk olarak sistemin hareket denklemleri yazılır. Bu sistemde sistemi harekete geçiren $u(t)$ kuvveti giriş, kütlenin yer değiştirmesini gösteren $y(t)$ ise çıkış olarak alınmıştır.



Şekil 1.3: Aktarımsal mekanik bir sistem

Sistem için hareket denklemini oluşturursak;

$$\boldsymbol{m.\frac{d^2y}{dt^2} = \sum f}$$

$$\boldsymbol{m.\frac{d^2y}{dt^2} = u - ky - b\dot{y}}$$

$$\boldsymbol{\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{1}{m}(u - ky - b\dot{y})}$$

Durum uzay gösterimi için durum denklemleri belirlensin. Daha sonra durum değişkenlerinin türevleri elde edilsin.

$$\boldsymbol{y = x_1}$$

$$\boldsymbol{\dot{y} = \dot{x}_1 = x_2}$$

$$\boldsymbol{\dot{x}_2 = \ddot{y} = \frac{1}{m}(u - ky - b\dot{y}) = \frac{1}{m}(u - kx_1 - bx_2)}$$

Durum değişkenlerinin türevlerinin ve çıkış ifadesinin sırasıyla matris formunda gösterilmesi ile 2 farklı denklem elde edilir. Bu denklemlere sırasıyla Durum Denklemi (State Equation) ve Çıkış Denklemi (Output Equation) ismi verilir.

$$\boldsymbol{\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k/m & -b/m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/m \end{bmatrix} u} \qquad \text{(Durum Denklemi)}$$

$$\boldsymbol{y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + [0]u} \qquad \text{(Çıkış Denklemi)}$$

Durum uzay gösteriminde kullanılan A, B, C, D matrisleri yardımıyla transfer fonksiyonunu elde edebilmek için,

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1}B + D$$

İfadesinden yararlanılır. Bu sistem için transfer fonksiyonu;

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{ms^2 + bs + k}$$

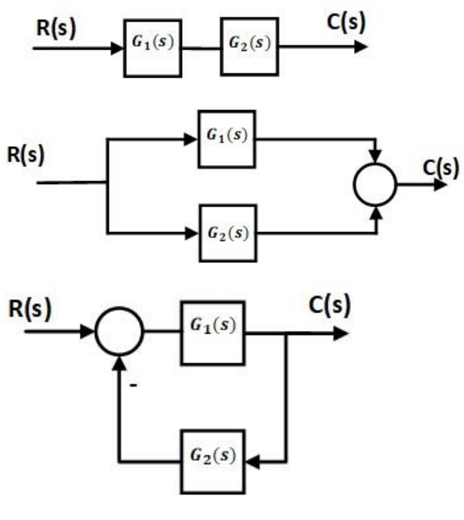
olarak elde edilir.

Her iki gösterim Matlab komutları yardımıyla birbirine dönüştürülebilmektedir. Durum uzay gösteriminden yani A, B, C, D matrislerini kullanarak transfer fonksiyonunu elde etmek için “ss2tf”, transfer fonksiyonundan durum uzay gösterimi yapabilmek için “tf2ss” komutları kullanılır.

Blok Diyagram Gösterimi

Bir sistemin gösterimi matematiksel denklemlerin kullanımı haricinde blokların ve sinyal akış grafiklerinin yardımıyla da yapılabilmektedir.

Şekil 1.4’te gösterilen temel bloklar ve matematiksel olarak karşılıkları gösterilmiştir.



$$\frac{C(s)}{R(s)} = G_1(s)G_2(s)$$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = G_1(s)+G_2(s)$$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)}$$

Şekil 1.4 Temel blok yapıları ve matematiksel karşılıkları

Matlab kullanarak yukarıda belirtilen blok yapılarına ait transfer fonksiyonları "series, parallel, feedback" komutları kullanılarak aşağıdaki gibi oluşturulabilir.

Örnek:

$G_1(s) = \frac{10}{s^2+2s+10}$ ve $G_2(s) = \frac{5}{s+5}$ için Şekil 1.4'te gösterilen 3 temel blok diyagrama ait transfer fonksiyonları hesaplansın.

Matlab programı 1-6	**Blok Kazançlarının Hesaplanması**
num1 = 10;	%G1(s)'in pay ve paydasının belirlenmesi
den1= [1 2 10];	
num2 = 5;	% G2(s)'in pay ve paydasının belirlenmesi
den2 = [1 5];	
[num,den] = series(num1,den1,num2,den2);	%Pay ve paydaları kullanarak kaskat bağlı sisteme
printsys(num,den)	ait TF'nun elde edilmesi ve yazdırılması
num/den =	
50	
-----------------------	
s^3 + 7 s^2 + 20 s + 50	%G1(s) ve G2(s)'i tf komutu ile oluşturulması
sys1 = tf(num1,den1);	
sys2 = tf(num2,den2);	
sys = series(sys1,sys2)	%Kaskat bağlı yapı için TF
sys1 =	
50	
-----------------------	
s^3 + 7 s^2 + 20 s + 50	%Paralel bağlı olması durumda TF
sys = parallel(sys1,sys2)	
sys =	
5 s^2 + 20 s + 100	
-----------------------	
s^3 + 7 s^2 + 20 s + 50	%G2(s)'in geribesleme yapıldığı durum için
sys = feedback(sys1,sys2)	TF'nin hesaplanması
sys =	
10 s + 50	
------------------------	
s^3 + 7 s^2 + 20 s + 100	

Önhazırlık Çalışması:

1. Birim dürtü ve birim basamak fonksiyonlarının Matlab'da nasıl tanımlandığını araştırınız.

2. $F(s) = \frac{w_n^2}{s(s^2+2\xi w_n s+w_n^2)}$ ve $0 < \xi < 1$ olduğu durum için transfer fonksiyonunun zaman düzlemindeki karşılığını elde ediniz.

3. $F(s) = \frac{5s+2}{(s+1)(s+2)^2}$ biçiminde verilen transfer fonksiyonunu kısmi kesirlerine ayırınız. Daha sonra bu sisteme ait dürtü tepkisini (impulse response) bulunuz. Elde ettiğiniz sonuçları Matlab ile doğrulayınız.

4. Şekil 1.3'te gösterilen 2. dereceden sisteme ait transfer fonksiyonunu;
    a. $m = 1\,kg,\ b = 5$ ve $k = 6$
    b. $m = 1\,kg\ b = 2$ ve $k = 1$
    c. $m = b = k = 1$

   değerlerini kullanarak elde ediniz. Sistemleri Aşırı sönümlü, Kritik sönümlü ve Yetersiz sönümlü olarak sınıflandırınız. Nedenini belirtiniz.

5. Matlab'da
    a. tf
    b. ss2tf
    c. tf2ss

   komutlarını inceleyiniz.

6. Transfer fonksiyonu $\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{(s+1)(s+3)(s-2)}$ olan sisteme ait durum uzay gösterimini elde ediniz. Matlab yardımıyla elde ettiğiniz gösterimi bulduğunuz sonuç ile karşılaştırınız. Blok diyagram gösterimini yapınız.

7. Transfer fonksiyonu $\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s-4}{(s+1)(s+3)(s-2)}$ olan sistemin durum uzay gösterimini elde etmeye çalışınız. Matlab kullanarak A, B, C, D matrislerini bulunuz.

Deney Adımları:

1. Aşağıda verilen temel fonksiyonların Laplace dönüşümlerini Matlab kullanarak alınız.
    a. Birim dürtü; $\delta(t)$
    b. Birim basamak; $u(t)$
    c. Birim rampa; $t * u(t)$
    d. Sinüs fonksiyonu; sin(w*t)
    e. Kosinüs fonksiyonu, cos(w*t)

2. Yukarıda verilen fonksiyonları zaman düzleminde 2 birim geciktirilmesi durumunda, Laplace dönüşümlerini Matlab kullanarak elde ediniz.

3. Transfer fonksiyonu $F(s) = \frac{5s+2}{(s+1)(s+2)^2}$ olan sistemin impulse tepkisini Matlab yardımıyla elde ediniz.

4. Transfer fonksiyonu

$$G(s) = \frac{1}{s^4 + 2s^3 + 6s^2 + 5s}$$

olan sisteme ait durum uzay gösterimini yaparak, A, B, C ve D matrislerini bulunuz. Aynı transfer fonksiyonuna ait A, B, C ve D matrislerini Matlab kullanarak elde ediniz.