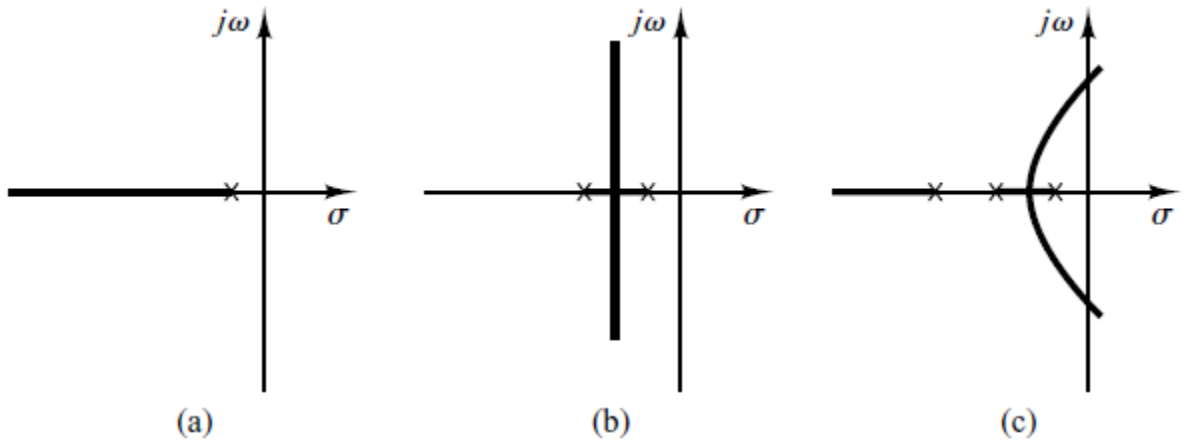


## Deney No: 4

### Kök Yer Eğrisi Kullanarak Denetleyici Tasarımı

Kontrol edilen sistemin değiştirilmesinin mümkün olmadığı durumlarda sistemden istenen geçici ve kalıcı durum performans özelliklerini sağlamak amacıyla denetleyicilerden yararlanılmaktadır. Pratik uygulamalarda, bir sistemden istenen performansın yalnızca K kazancının ayarlanmasıyla (veya bazı diğer ayarlanabilir parametrelerle) elde edilemeyeceği o sistemin kök yer eğrisi grafiği çizildiğinde kolayca görülebilir. Bazı sistemler K kazancının tüm değerleri için kararlı olmayabilir. Tek başına K kazancı kullanmak yerine istenilen özellikleri sağlayan denetleyiciyi dizayn etmek gerekebilir. Bu denetleyiciler sistemin açık döngü transfer fonksiyonuna yeni kutup ve/sıfırlar kazandırarak kök yer eğrisinin istenilen kapalı döngü kutup noktalarından geçmesi için zorlayacaklardır. Sistemin göstermesi istenen performansı kapalı döngü sisteme ait baskın kutuplar ile gerçekleştirmesi dolayısıyla sisteme sonradan eklenen kutup ve sıfırların sistemin karakteristiğini değiştirmeyecek şekilde seçilmesi gerekmektedir.

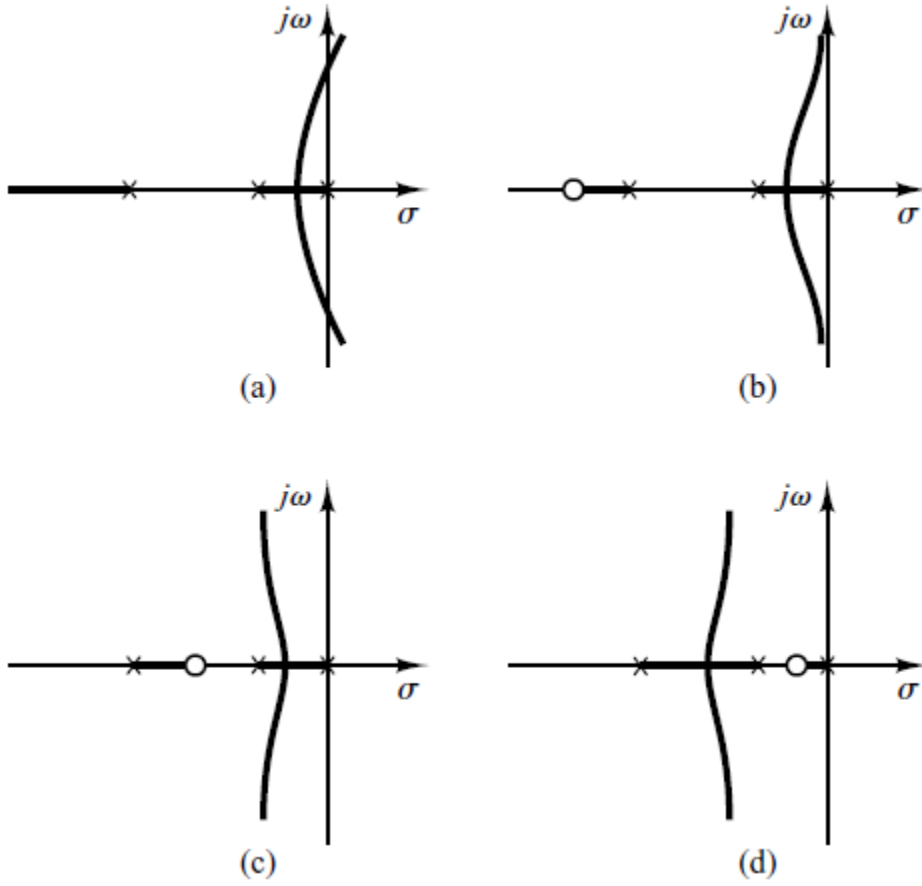
Sisteme eklenen kutupların etkileri aşağıda verilen kök yer eğrisi grafiklerinde gözükmektedir.



Şekil 3.6: Sisteme kutup eklenmesi ile ortaya çıkan kök yer eğrisi grafikleri

Şekil 3.6'daki grafikler incelendiğinde sistemin açık döngü transfer fonksiyonuna eklenen kutuplar sistemin kök yer eğrisini s-düzleminde sağ tarafa doğru çekmektedir. Bu da sistemin bağıl kararlılığını azaltmaktadır. Sisteme integral denetleyici eklemek s-düzlemine bir adet kutup eklemek anlamına gelir, böylece sistem daha az kararlı olur.

Sisteme sıfır eklenmesi durumunda kök yer eğrisi grafiklerinin nasıl değiştiği Şekil 3.7’de gösterilmektedir. 3 adet kutba sahip sisteme farklı değerlerde sıfırlar eklenmiş ve buna göre kök yer eğrileri çizilmiştir. Eklenen sıfırlar genel olarak kök yer eğrisi grafiklerinin sol tarafa doğru kaymasını sağlamış, böylece sistemlerin bağıl kararlılıkları artmıştır.

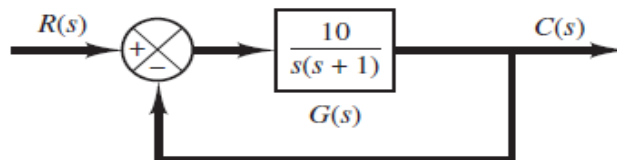


Şekil 3.7: Sisteme sıfır eklenmesi ile ortaya çıkan kök yer eğrisi grafikleri

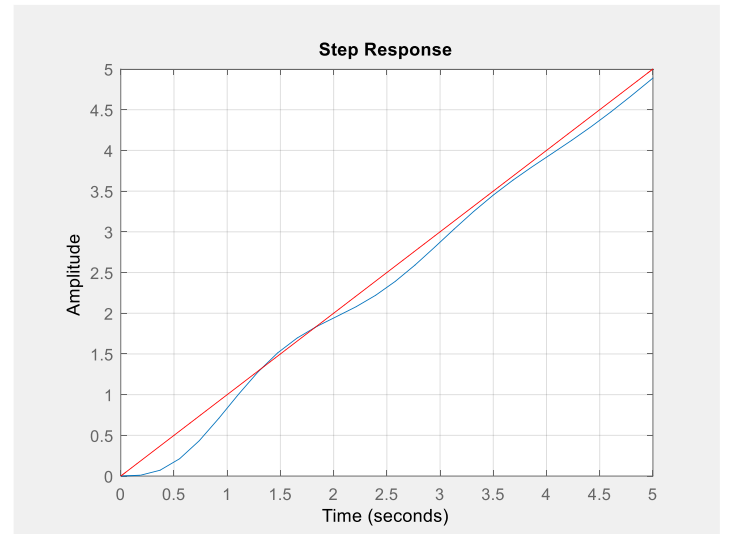
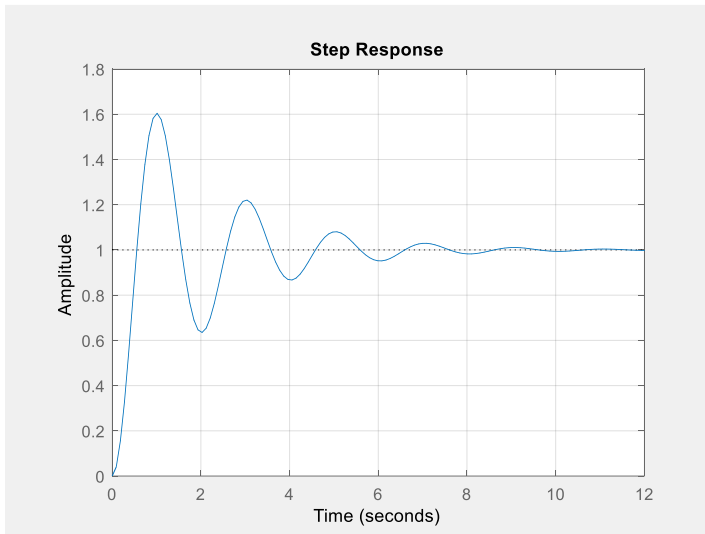
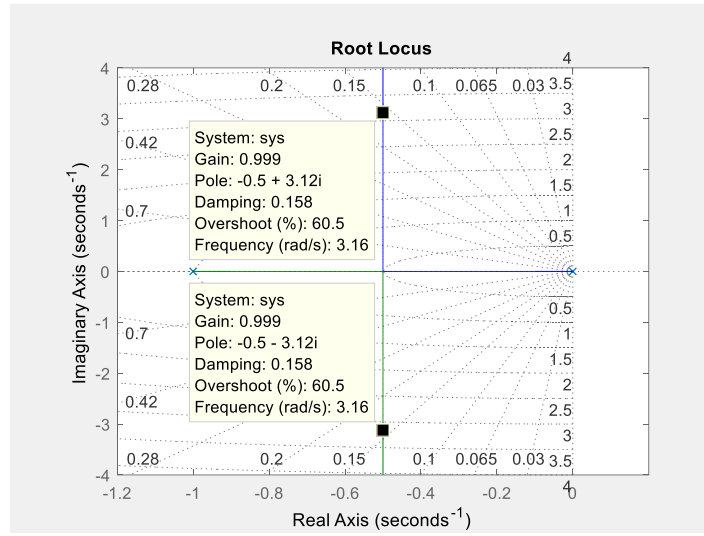
Şekil 3.7’de ilk olarak (a)’da gösterilen sistem sadece küçük K kazançları için kararlı iken, sisteme eklenen sıfır yardımıyla (b), (c) ve (d)’de gösterilen grafiklerdeki sistemlerin tamamı pozitif K kazançları için kararlı hale gelmiştir. Ayrıca baskın kutuplar sayesinde sistemin geçici durum performans kriteri iyileşmiş ve daha hızlı sistem haline gelmiştir.

### Örnek:

Şekilde gösterilen geribeslemeli sisteme ait kapalı döngü kutupları s-düzleminde inceleyiniz. Verilen bu sistemin basamak ve rampa tepkilerini analiz ediniz.



Matlab programı 3-4	Kontrol Sistemine ait root locus grafiğinin çizdirilmesi
<pre> sys_ol = tf(10,[1 1 0]) figure, rlocus(sys_ol), grid  sys_cl = tf(9.98,[1 1 9.98]); figure, step(sys_cl), grid  sys_2_cl = tf(9.98,[1 1 9.98 0]); figure, step(sys_2_cl),axis([0 5 0 5]) t = 0:0.05:5; hold on, plot(t,t,'r'),grid </pre>	<pre> % transfer fonksiyonunun oluşturulması ve kök yer eğrisinin çizimi %Kapalı döngü sistemin basamak ve rampa tepkileri </pre>



Şekil 3.8: Verilen sisteme ait kök yer eğrisi, basamak ve rampa tepkileri

Verilen kontrol sistemin için kapalı döngü transfer fonksiyonu,

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{10}{s^2 + s + 10}$$

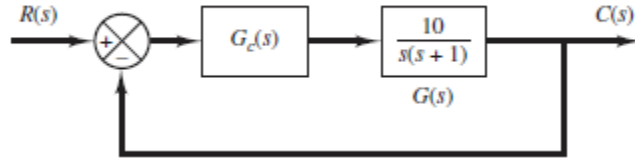
olur ve bu durumda kapalı döngü sistemin kutupları  $s_{1,2} = -0.5 \pm j3.12$  olarak bulunur. Bu kutup pozisyonları kök yer eğrisi grafiği üzerinde gösterilmiş ve beklendiği gibi bu noktadaki kazanç değerinin 1 olduğu gözlenmiştir. Bu kutup noktaları için sistemin sönümlenme katsayısı ve doğal frekansı hesaplanırsa,

$$\xi = \cos\left(\tan^{-1}\frac{3.12}{0.5}\right) = 0.158$$

$$w_n = \sqrt{0.5^2 + 3.12^2} = \sqrt{10} = 3.16 \text{ rad/sn}$$

olarak bulunur. Sönümlenme katsayısının düşük olması maksimum aşmanın yüksek seviyelere (%60) çıkmasına sebep olmaktadır. Bu durum sistemin basamak tepkisinde açıkça gözükmemektedir.

Bu defa şekilde gösterildiği gibi  $\xi = 0.5$  ve  $w_n = 3 \text{ rad/sn}$  olmasını sağlayacak şekilde bir denetleyici tasarlanmak istenmektedir.

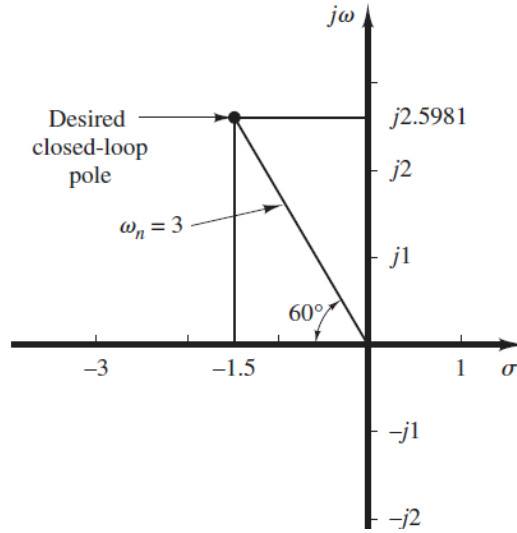


Şekil 3.9: Denetleyici tasarımı

Bu durumda sistemin karakteristik denklemi,

$$\Delta(s) = s^2 + 2\xi w_n s + w_n^2 = s^2 + 3s + 9$$

olmaktadır. Bu durumda kapalı döngü sistemin baskın olan kutupları  $s_{1,2} = -1.5 \pm j2.59$  olmalıdır. Şekil 3.8’de verilen kök yer eğrisi grafiği incelenirse, bulunan bu kutup noktalarının sadece K kazancını değiştirerek o kök yer eğrisi üzerinde yer alamayacağı anlaşılır. Bu durumda sistemin denetleyicisi sadece kazanç ifadesinden (oransal-P tipi) oluşmayacaktır.



Şekil 3.10:  $\xi = 0.5$  ve  $\omega_n = 3 \text{ rad/sn}$  için kapalı döngü sistemin baskın kutuplarının yerleri

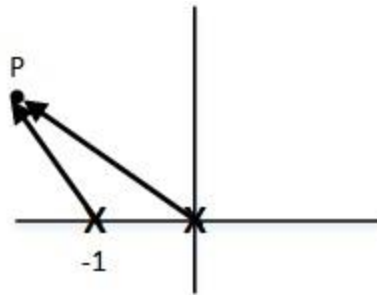
Kapalı döngü sistemin kutuplarını istenilen değerlere getirebilmek için Faz İlerletici (Phase Lead Compensator) kullanılsın. Bu denetleyicinin transfer fonksiyonu,

$$G_c(s) = K_c \alpha \frac{Ts+1}{\alpha Ts+1} = K_c \frac{s+\frac{1}{T}}{s+\frac{1}{\alpha T}}$$

ve burada  $0 < \alpha < 1$  aralığındadır. Denetleyicinin transfer fonksiyonu incelendiğinde bir adet kazanç değeri ( $K_c$ ),  $s = -\frac{1}{T}$ 'de bir adet sıfır ve  $s = -\frac{1}{\alpha T}$ 'de bir adet kutuptan oluşmaktadır. Bu kazanç değeri ve kutup sıfır noktalarının pozisyonu belirlenerek denetleyici dizayn edilir.

### **Yöntem 1:**

İlk olarak kök yer eğrisinin istenilen noktalardan geçebilmesi bu denetleyicinin kaç derecelik faz açısı sağlaması gerektiği hesaplanır. Kök yer eğrisi istenilen bu noktalardan geçeceğine göre bu noktada açı şartının sağlanması gerekmektedir.



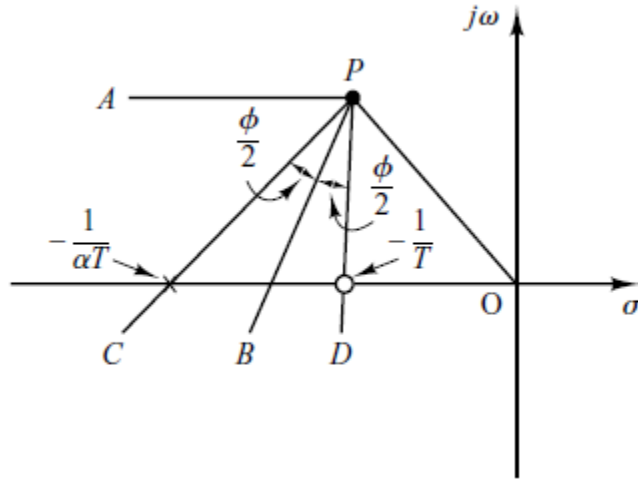
Şekil 3.11: İstenilen kutup noktasına olan vektörlerin yaptıkları açılar

Açı şartına göre;

$$\phi + \theta_1 + \theta_2 = (2k + 1)\pi$$

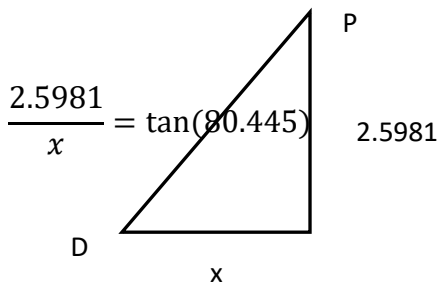
eşitliği sağlanmalıdır. Burada  $\phi$  açısı şartının sağlanabilmesi için denetleyicinin sahip olması gereken faz açısı değerini,  $\theta_1$  ve  $\theta_2$  açıları döngü sistemin faz açıları göstermektedir.  $\theta_1$  ve  $\theta_2$  açıları sırasıyla 100.89 ve 120 olarak hesaplanır. Bu durumda denetleyicinin sağlaması gereken açı  $\phi = -40.89$  olmalıdır. Denetleyicinin kutup ve sıfırları bu faz açısını sağlayacak şekilde yerleştirilmelidir. Bu faz açısını sağlayan farklı sıfır ve kutup noktaları bulunmaktadır.

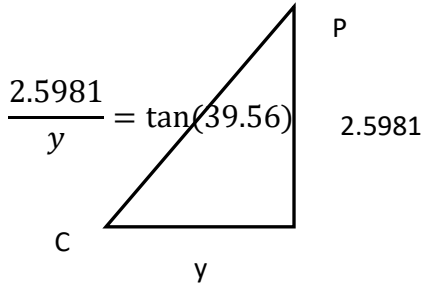
İstenilen kutup noktasından yatay bir doğru uzatılır (PA doğrusu). Daha sonra P noktası ile orijin birleştirilir (PO doğrusu). OPA açısını ikiye bölecek şekilde PB doğrusu uzatılır. Bu doğrunun her iki yanına gerekli olan açı miktarının yarısı  $\frac{\phi}{2}$  eklenerek PC ve PD doğruları uzatılır. Bu doğruların reel eksenini kestiği noktalar sırasıyla denetleyicinin kutup ve sıfır noktalarını oluşturur. Basit trigonometrik ve geometrik yöntemlere kutup ve sıfır noktaları aşağıdaki şekilde hesaplanır.



Şekil 3.12: Denetleyicinin kutup ve sıfır noktalarının hesaplanması

OPA açısı  $120^\circ$  olarak hesaplanır. PB doğrusu bu açiyı  $60^\circ$  ar derecelik iki açıya böler.





$x$  sıfır noktası 1.9373 ve  $y$  kutup noktası 4.64 olarak hesaplanır ve denetleyinin transfer fonksiyonu  $G_c(s) = K_c \frac{s+1.9373}{s+4.64}$  olur.  $K_c$  kazancını hesaplamak için genlik şartı kullanılır.

$s = -1.5 + j2.59$  noktasındaki genlik değerinin 1 olması gerektiğinden

$$|G_c(s) G(s)| = 1$$

$$\left| K_c \frac{s + 1.9373}{s + 4.64} \frac{10}{s(s + 1)} \right| = 1$$

ifadesinden  $K_c = 1.2277$  olarak bulunur. Bu durumda açık döngü transfer fonksiyonu,

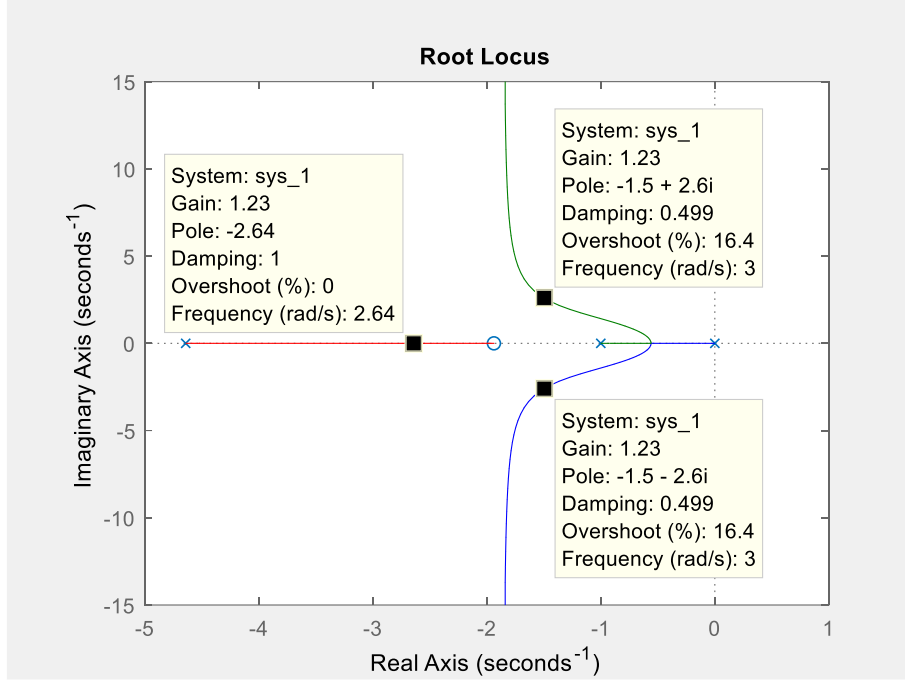
$$G_c(s) G(s) = 1.2277 \frac{s + 1.9373}{s + 4.64} \frac{10}{s(s + 1)}$$

ve kapalı döngü transfer fonksiyonu,

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{12.287s + 23.876}{s^3 + 5.646s^2 + 16.933s + 23.876}$$

olur.

Matlab programı 3-5	Yöntem 1 ile elde edilen denetleyici için Kök Yer Eğrisi Çizimi
<pre>sys_1 = tf([10 19.373],[1 5.64 4.64 0]); rlocus(sys_1)</pre>	<pre>% Açık döngü transfer fonksiyonunun oluşturulması ve kök yer eğrisi grafiği</pre>



Şekil 3.13: Yöntem 1 ile elde edilen denetleyici kullanılarak elde edilen sisteme ait Kök Yer Eğrisi

Bu sistem tip-1 sistem olduğundan (Açık döngü sistemin  $s = 0$ 'da 1 adet kutbu olduğundan) basamak giriş için sistemin kalıcı durum hatası 0 olur. Oluşturulan denetleyicinin performansını analiz edebilmek için rampa giriş için kalıcı durum hatasını hesaplamak gerekir. Bunun için  $K_v$  hız hata katsayısı hesaplanmalıdır.

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG_c(s)G(s) = 5.139$$

ve kalıcı durum hatası ise,

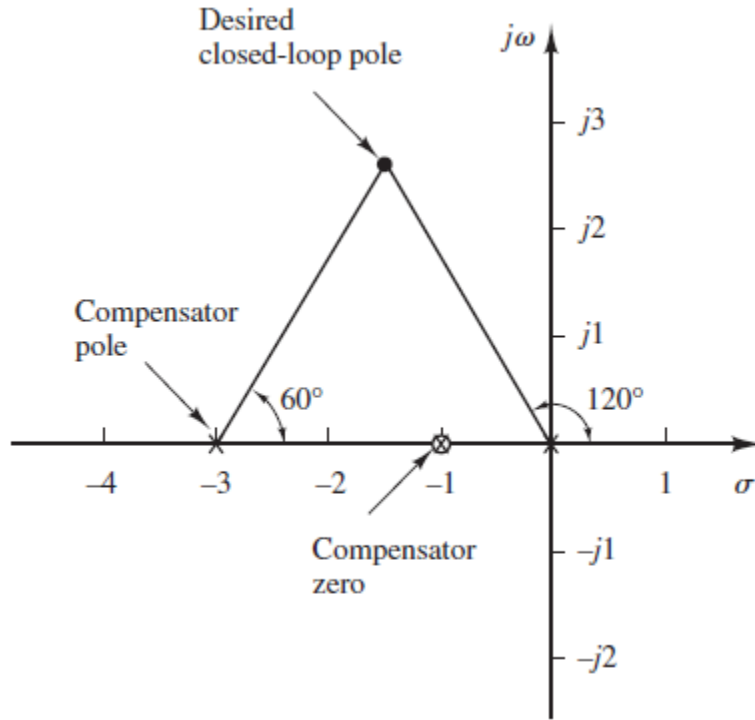
$$e_{ss} = \frac{1}{K_v} = 0.196$$

olarak bulunur.

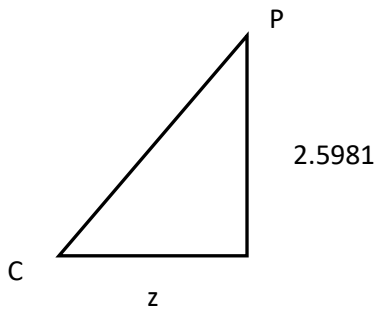


## Yöntem 2:

Denetleyicinin sıfırı  $s = -1$  noktasında seçilirse, sistemin  $s = -1$ 'deki kutbu ile birbirini sadeleştirir. Bu durumda açık döngü sistemin transfer fonksiyonu  $s = 0$ 'da bir kutup ve denetleyicinin değeri bilinmeyen bir kutbundan oluşur. Yine açı şartının  $s = -1.5 + j2.59$  noktasında sağlanması gerektiğinden denetleyicinin kutup noktası hesaplanabilir.



Şekil 3.14: Açık döngü sistemin kutup ve sıfırları



$$\frac{2.5981}{z} = \tan(60) \quad z = 1.5 \text{ olur}$$

ve kutup noktası  $p = 1.5 + j2.59$  olarak bulunur.

Aynı şekilde  $s = -1.5 + j2.59$  noktasında genlik şartının da sağlanması gerektiği kullanılarak  $K_c$  kazancı,

$$\left| K_c \frac{s+1}{s+3} \frac{10}{s(s+1)} \right| = 1$$

$$K_c = 0.9$$

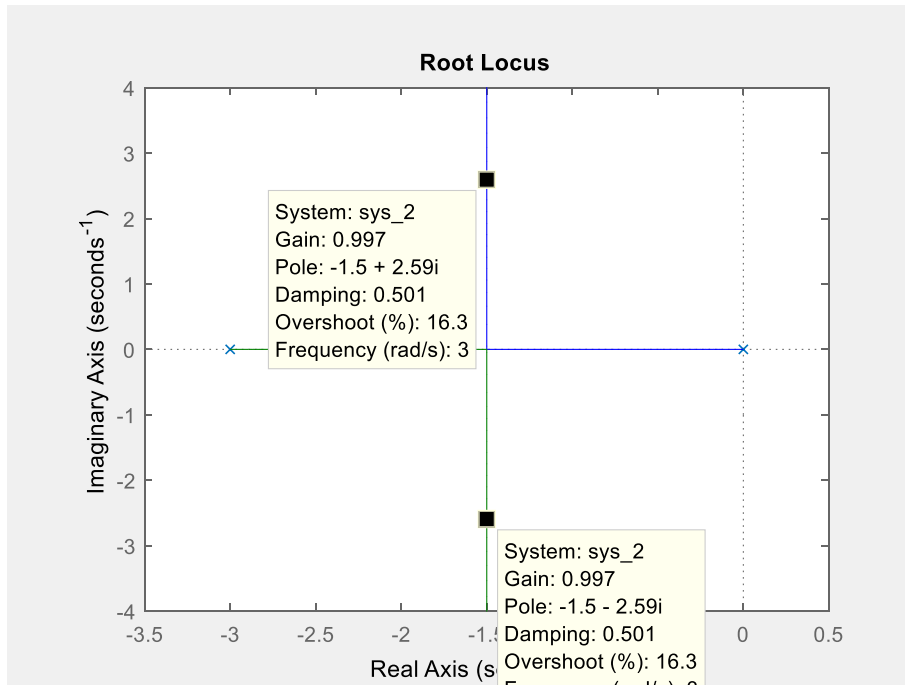
olarak hesaplanır.

Bu durumda açık döngü transfer fonksiyonu,

$$G_c(s) G(s) = 0.9 \frac{s+1}{s+3} \frac{10}{s(s+1)} = \frac{9}{s(s+3)}$$

olur. Açık döngü sistemin transfer fonksiyonu kullanılarak kök yer eğrisi çizilirse Şekil 3.15'te gösterilen grafik elde edilir.

Matlab programı 3-6	Yöntem 2 ile elde edilen denetleyici için Kök Yer Eğrisi Çizimi
<pre>sys_2 = tf(9,[1 3 0]); rlocus(sys_2)</pre>	<pre>% Açık döngü transfer fonksiyonunun oluşturulması ve kök yer eğrisi grafiği</pre>



Şekil 3.15: Yöntem 1 ile elde edilen denetleyici kullanılarak elde edilen sisteme ait Kök Yer Eğrisi

Bir önceki yöntemde olduğu gibi bu sistem yine tip 1 sistemdir, dolayısıyla basamak giriş için kalıcı durum hatası 0 olur. Rampa giriş için kalıcı durum hatasını hesaplamak istersek hız hata katsayısını bulmalıyız.

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s G_c(s) G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{9}{s(s+3)} = 3$$

ve kalıcı durum hatası ise,

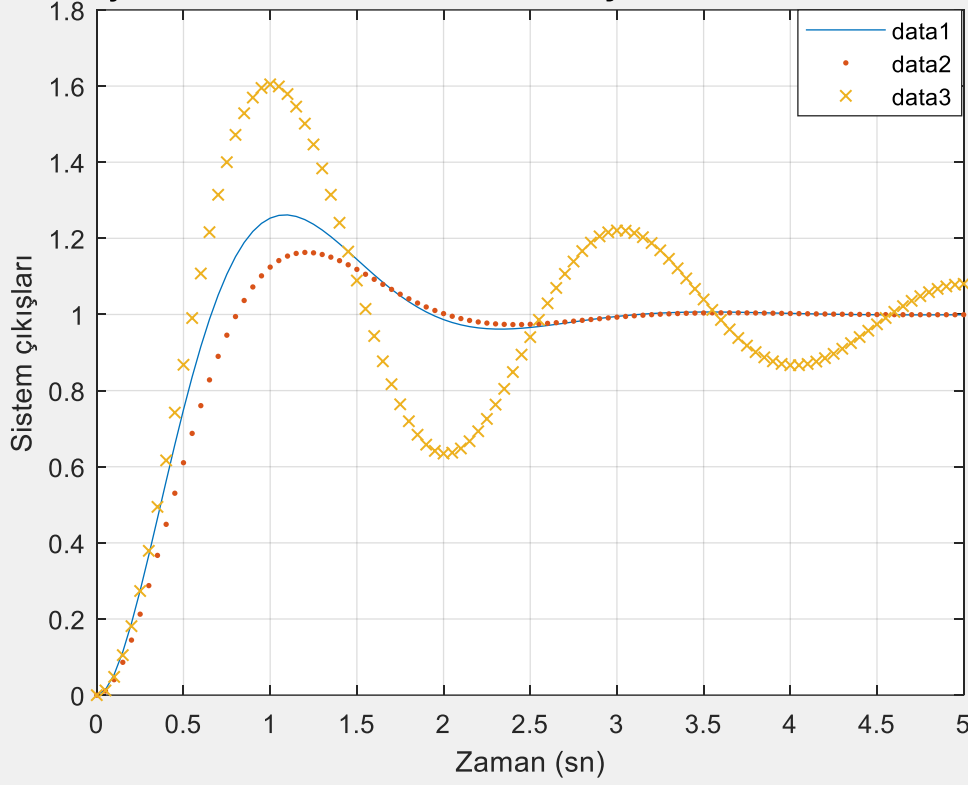
$$e_{ss} = \frac{1}{K_v} = 0.333$$

olarak bulunur. Yöntem 2 ile elde edilen denetleyicinin performansı rampa giriş için kalıcı durum hatasının daha fazla olmasından dolayı daha kötüdür.

Her iki yöntem kullanılarak denetlenen sistemlerin basamak ve rampa girişler için tepkileri analiz edilsin.

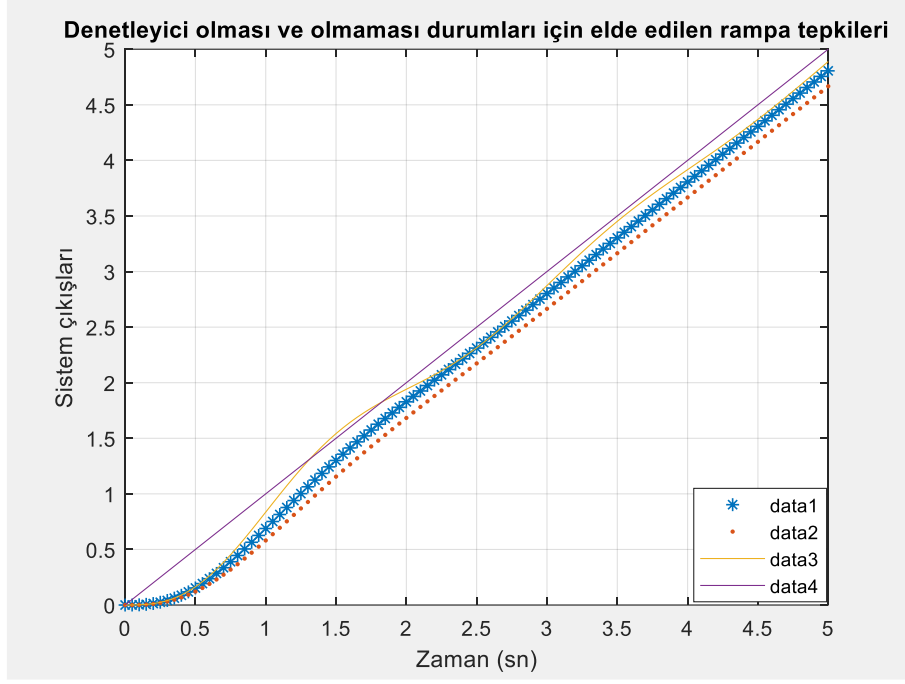
Matlab programı 3-7	Yöntem 1 ve 2 ile elde edilen denetleyicilerin performans analizler
<pre> num1 = [12.287 23.876]; den1 = [1 5.646 16.933 23.876]; num2 = [9]; den2 = [1 3 9]; num = [10]; den = [1 1 10]; t = 0:0.05:5; c1 = step(num1,den1,t); c2 = step(num2,den2,t); c = step(num,den,t); figure, plot(t,c1,'-') hold on plot(t,c2,'.') plot(t,c,'x'), grid on title('Denetleyici olması ve olmaması durumları için elde edilen basamak tepkileri') xlabel('Zaman (sn)') ylabel('Sistem çıkışları') </pre>	<pre> %Yöntem 1 kullanılarak elde edilen kapalı döngü tf %Yöntem 2 kullanılarak elde edilen kapalı döngü tf %Denetleyici olmaması durumdaki transfer fonksiyonu  %1. yöntem ile bulunan denetleyici için basamak tepkisi %2. yöntem ile bulunan denetleyici için basamak tepkisi %denetleyici olmadığı durum için basamak tepkisi </pre>

**Denetleyici olması ve olmaması durumları için elde edilen basamak tepkileri**



**Şekil 3.15:** Yöntem 1 ve 2 ile elde edilen denetleyicilerin performanslarıyla denetleyici olmadan kullanılan sistemin basamak tepkilerinin karşılaştırılması

Matlab programı 3-8	Yöntem 1 ve 2 ile elde edilen denetleyicilerin performans analizler
<pre>num1 = [12.287 23.876]; den1 = [1 5.646 16.933 23.876 0]; num2 = [9]; den2 = [1 3 9 0]; num = [10]; den = [1 1 10 0]; t = 0:0.05:5; c1 = step(num1,den1,t); c2 = step(num2,den2,t); c = step(num,den,t); figure, plot(t,c1,'*') hold on plot(t,c2,'.') plot(t,c,'-') plot(t,t,'-') grid title('Denetleyici olması ve olmaması durumları için elde edilen rampa tepkileri') xlabel('Zaman (sn)') ylabel('Sistem çıkışları')</pre>	<pre>%Yöntem 1 kullanılarak elde edilen kapalı döngü tf (rampa için) %Yöntem 2 kullanılarak elde edilen kapalı döngü tf (rampa için) %Denetleyici olmaması durumdaki transfer fonksiyonu (rampa için) %1. yöntem ile bulunan denetleyici için rampa tepkisi %2. yöntem ile bulunan denetleyici için rampa tepkisi %denetleyici olmadığı durum için basamak tepkisi %Rampa giriş</pre>

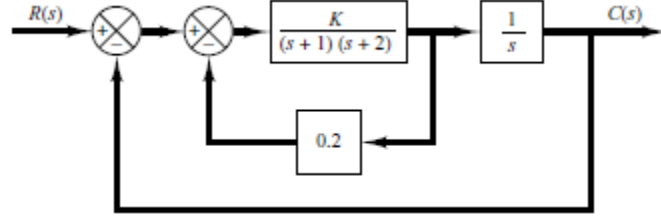


Şekil 3.15: Rampa giriş için denetleyici performanslarının karşılaştırılması

### Ön Hazırlık Çalışması

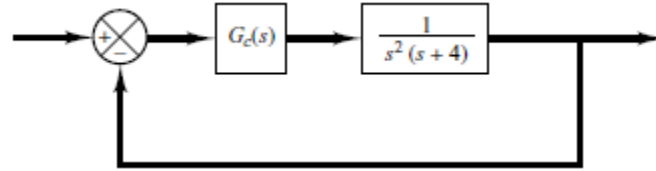
1. Yöntem 1 kullanılarak elde edilen denetleyici için baskın kutuplar kapalı döngü sistemin baskın kutupları  $s_{1,2} = -1.5 \pm j2.59$  noktasına ulaştığında diğer kutup noktasını hesaplayınız.
2. Bir önceki soruda bulduğunuz kutbu Kök Yer Eğrisi üzerinde göstererek bulduğunuz sonucun doğruluğunu ispatlayınız.
3. Şekilde bir kontrol sistemine ait blok diyagram verilmektedir. Bu sistemde kapalı döngü sistemin baskın kutupları ele alındığında sönümlenme kat sayısının  $\xi = 0.5$  olması istenmektedir.
  - a. Sönümlenme katsayısının  $\xi = 0.5$  olabilmesi için K kazancının değerini hesaplayınız.
  - b. Hesapladığınız K değeri için sistemin basamak tepkisini çiziniz.

- c. Aynı grafik üzerinde sadece baskın kutupları ele alarak sistemin basamak tepkisini çizerek karşılaştırma yapınız.
- d. Sistemin tipini belirleyiniz. Basamak ve rampa girişler için kalıcı durum hatalarını hesaplayınız. Grafik üzerinde gösteriniz.
- e.  $0 < K < \infty$  için kapalı döngü sistemin kutuplarını s-düzleminde çiziniz.



4. Şekilde verilen kontrol sistemi için aşağıdaki özellikleri sağlayan bir denetleyici dizayn edilmek istenmektedir.

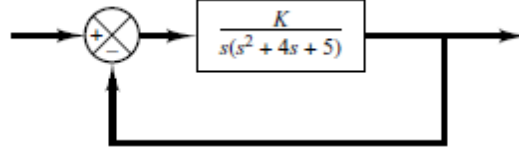
- i. Birim basamak giriş için %25'lik maksimum aşma
- ii. Yerleşme zamanı,  $t_s \leq 5 sn$ .



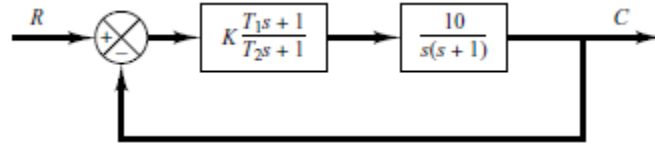
- a. Bu denetleyicinin Faz İlerletmeli Denetleyici olduğunu kabul ederek 1. yöntemi kullanarak dizayn ediniz.
- b. Faz İlerletmeli Denetleyiciyi 2. yöntemi kullanarak elde ediniz.
- c. Denetleyicinin olmadığı, 1. ve 2. yöntem kullanılarak elde edilen denetleyicilerin olduğu sistemlerin birim basamak, rampa ve parabolik girişler için ürettikleri tepkileri Matlab'da çizerek karşılaştırınız. (Her giriş için ayrı grafik kullanınız. Denetleyicinin etkisini görebilmek için aynı giriş için çizimleri tek grafik üzerinde yapınız.)

## Deney Adımları

1. Şekilde negatif geribeslemeli bir kontrol sistemi verilmektedir.



- a. K kazancının pozitif değerleri için kök yer eğrisini çiziniz.
- b. Kapalı döngü sistemin baskın kutupları göz önüne alındığında, sönümlenme katsayısını 0.5 olabilmesi K kazancı kullanılarak sağlanabilir mi? İspat ederek gösteriniz.
- c. Sönümlenme katsayısını 0.5 yapan denetleyiciyi dizayn ediniz ve kök yer eğrisi üzerinde gösteriniz.
- d. Kapalı döngü sistemin basamak tepkisini çiziniz. Maksimum aşma değerini hesaplayınız. Bulduğunuz maksimum aşma için sönümlenme katsayısını bulunuz.
2. Şekilde verilen kontrol sistemi için Faz İlerletmeli bir denetleyici dizayn edilecektir. Sönümlenme katsayısının  $\xi = 0.5$  ve doğal frekansının  $w_n = 3 \text{ rad/sn}$  olması istenmektedir.



- a. Verilen koşulları sağlayacak olan bu denetleyicinin bilinmeyen katsayılarını hesaplayınız. (Yöntem 1 veya Yöntem 2'yi kullanabilirsiniz.)
- b. Denetleyicinin olduğu ve olmadığı durumları kapalı döngü sistemin birim basamak tepkisini çizdirerek inceleyiniz.
- c. Bu defa kapalı döngü sistemin rampa tepkisini Denetleyicinin olduğu ve olmadığı durumlar için inceleyiniz.