Deney No: 5

Frekans Tepkisi Analizleri

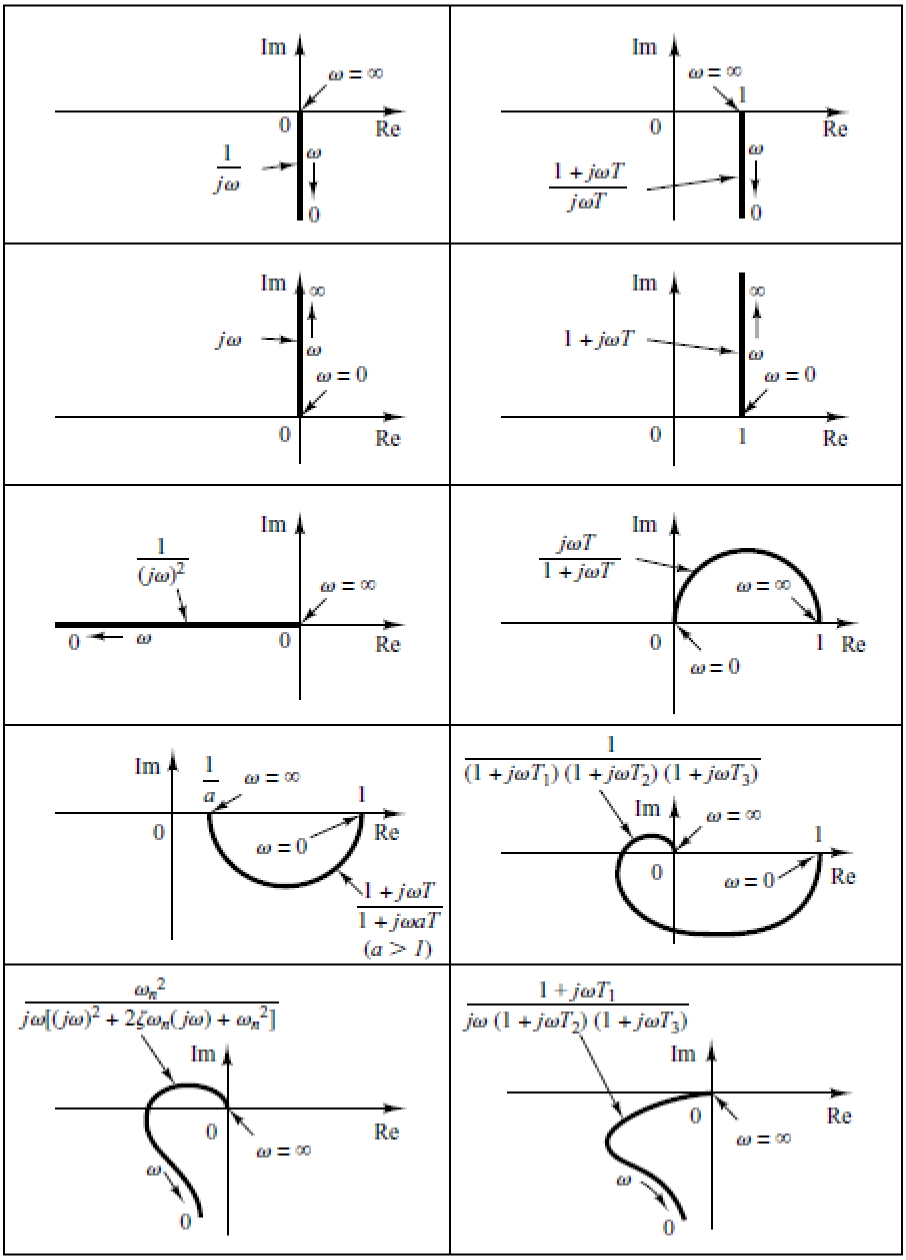
Bir sistemin sinüzoidal giriş için ürettiği kalıcı durum tepkisine o sistemin frekans cevabı denir. Frekans tepkisi analizinde tek bir frekans için değil tüm frekans bölgesi için sistemin kalıcı durumu incelenir. Frekans tepkisi ve kök yer eğrisi yaklaşımları birbirinin tümleyenidir. Her iki yaklaşımında avantajları öne çıkmaktadır. Frekans tepkisi analizinde sistemin belli bir frekans bölgesi detaylı olarak incelenebilmekte, o bölge için bir denetleyici sistem önerilebilmektedir. Bunun dışında sistemlerin tek başına kararlılıklarının haricinde birbirleri ile karşılaştırılarak hangi sistemlerin daha kararlı olduklarının tespiti frekans tepkisi analizleri ile mümkün olmaktadır. Yaygın olarak frekans tepkisi analizlerinde 2 farklı grafiksel yaklaşımdan yararlanılmaktadır. Bunlardan ilki Nyquist Grafiği olup, sistemin transfer fonksiyonunun frekans bölgesinde genlik ve faz bilgilerinin bir arada gösterildiği grafiklerdir. Diğer yaklaşım Bode Grafiklerinde ise sistemin frekans bölgesindeki kazancı (db cinsinden) ve faz değeri logaritmik ölçekte ayrı ayrı gösterilmektedir.

1. Nyquist Eğrisi

Kutupsal grafik veya Nyquist grafiği sinüzoidal bir G(jw) transfer fonksiyonunun w'nın 0 ve ∞ aralığında değişmesi ile transfer fonksiyonunun genliğinin ve fazının kutupsal koordinatlar üzerinde gösterildiği eğrilerdir. Bir başka ifadeyle Nyquist grafiği w'nın 0 ve ∞ aralığı için G(jw) vektörünün geometrik yerini göstermektedir. Nyquist grafiği kullanmanın bir avantajı tek bir grafik üzerinde sistemin tüm frekans bölgesindeki frekans tepkisi karakteristiğini gösterebilmesidir. Dezavantajı ise transfer fonksiyonu içerisindeki tüm terimlerin katkısını grafik üzerinde görülememesidir.

Tablo 1'de temel transfer fonksiyonların Nyquist grafiği görülmektedir. Transfer fonksiyonunun derecesi, s = 0'daki kutbunun olup olmaması, payı ve paydasındaki derece farklarının belirlenmesi ile Nyquist grafiğinin nasıl olacağı hakkında bir yaklaşım yapılabilir. Bu tabloda da kutup ve sıfırların tam olarak yerleri bilinmemesine rağmen Nyquist grafikleri çizilebilmiştir.

Tablo 1: Temel transfer fonksiyonları için Nyquist grafikleri

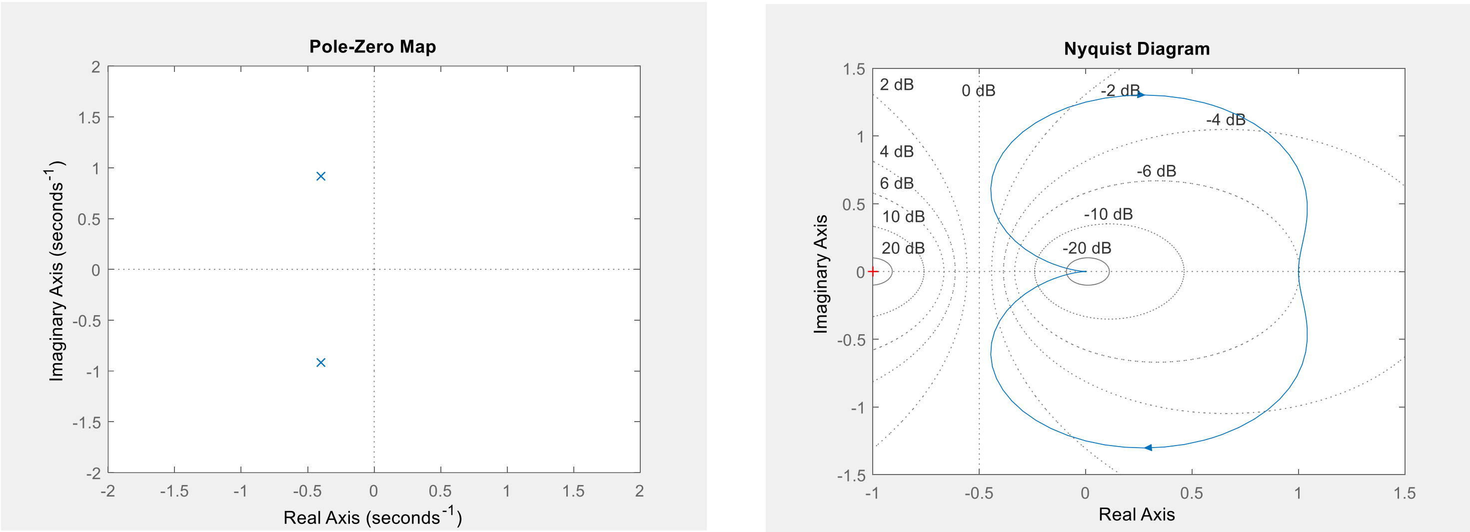


Matlab kullanarak Nyquist grafiğinin çizildiği örnekleri inceleyiniz. Transfer fonksiyonu oluşturulduktan sonra "nyquist" komutu ile çizim yapılabilmektedir. Bu çizim tüm frekans bölgesi için yapılabildiği gibi istenilen frekans bölge için de detaylı olarak çizim yapılabilmektedir.

Transfer fonksiyonu $G_1(s) = \frac{1}{s^2+0.8s+1}$ olan sisteme ait Nyquist grafiği çizilsin. İlk olarak s = 0'da kutbu olmadığı için sonlu grafik sonlu bir değerden başlayacaktır. s yerine 0 yazıldığında G(s) = 1 olduğundan grafik 1'den başlayıp frekans arttıkça 0'a yaklaşacaktır. Pay ve payda arasındaki derece farkı 2 olduğundan 180° ile G(jw) düzleminde 0'a girecektir.

Matlab programı 5-1	Nyquist grafiğinin çizimi

`sys1 = tf(1,[1 0.8 1]);`
`figure, pzmap(sys1), axis([-2 2 -2 2])`
`figure, nyquist(sys1), grid`
	`% transfer fonksiyonunun oluşturulması`
	`%Açık döngü sistemin kutup ve sıfır grafiklerinin gösterimi`
	`%Sistemin nyquist grafiği`



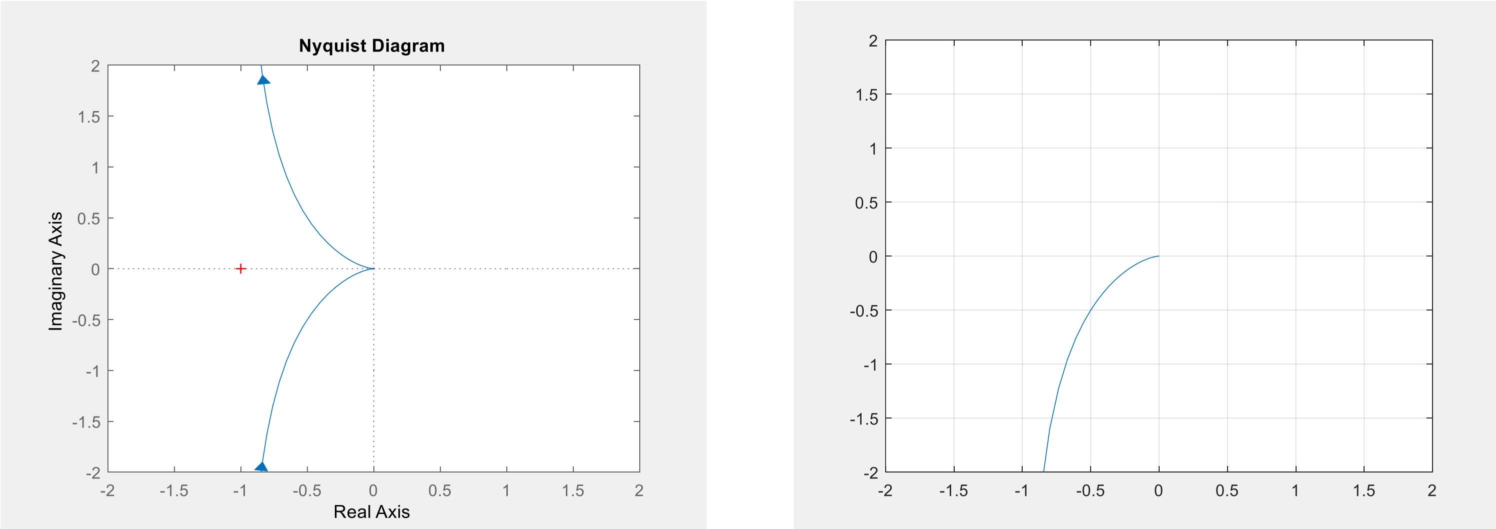
Şekil 1: Verilen sisteme ait kutup sıfır grafiği ve Nyquist eğrisi

Verilen sistemin sol yarı düzlemde 2 adet kompleks kutbu bulunmaktadır. Bu kutuplar imajiner eksen üzerinde yer almadığından nyquist eğrisi frekans düzleminde sonsuz genliğe ulaşmayacaktır. Grid komutu ile dB cinsinden kazanç değerlerini grafik üzerine eklemektedir. Nyquist grafiği ile bu kazanç değerlerini kesiştirdiğimizde o frekanstaki kazancın dB cinsinden karşılığını okunabilir.

Imajiner eksen üzerinde kutup olduğu durumlarda ise G(jw)'nın genliği ∞ olacağından bu durumlar detaylı olarak incelenmelidir. Transfer fonksiyonu $G_2(s) = \frac{1}{s^2+s}$ olan sistemin s = 0'da 1 kutbu bulunmaktadır. Bu sistemin Nyquist grafiğini Matab ile çizdirilsin.

Matlab programı 5-2	Imajiner eksen üzerinde kutup bulunması durumunda Nyquist grafiği

`sys2 = tf(1,[1 1 0]);`
`figure, nyquist(sys2), axis([-2 2 -2 2])`
`num = 1; den = [1 1 0];`
`w = 0.1:0.1:100;`
`[real, im, w] = nyquist(num,den,w);`
`figure, plot(real, im), axis([-2 2 -2 2])`
	`% transfer fonksiyonunun oluşturulması`
	`% Sistemin nyquist grafiği`
	`% Belli frekans bölgesi için Nyquist grafiğinin çizilmesi`
	`% Seçilen frekans bölgesinin detaylı bir şekilde incelenmesini sağlar.`



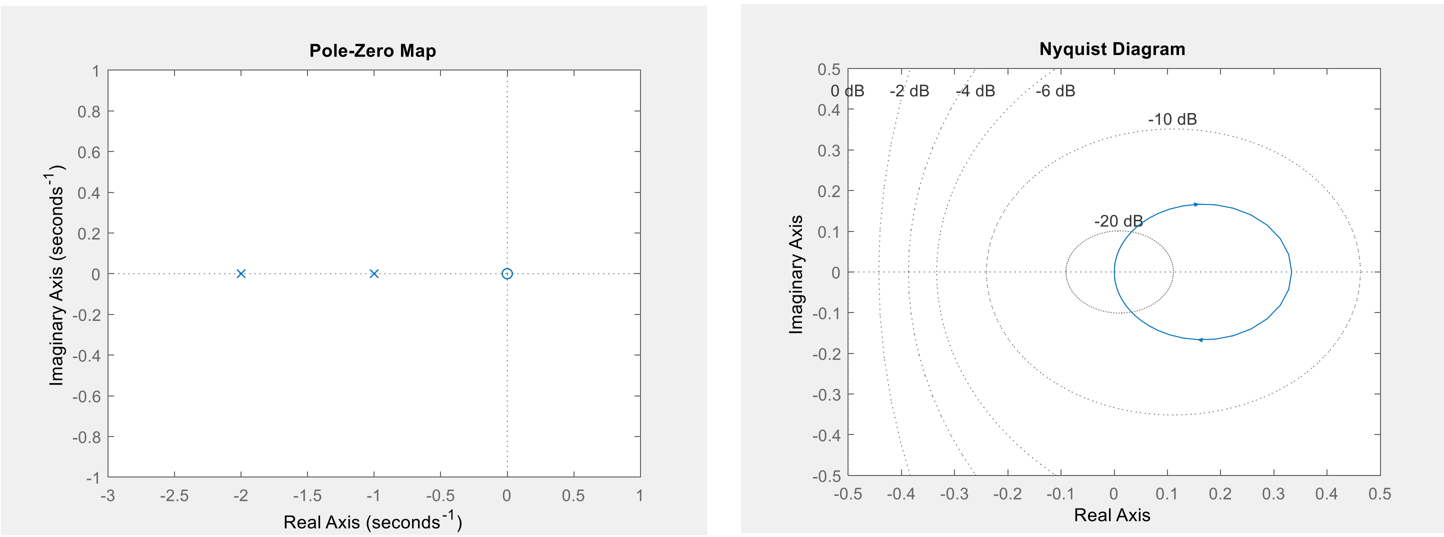
Şekil 2: s = 0'da kutup olması durumunda sistemin Nyquist grafiği ve belirli frekans bölgesinin incelenmesi

Bir önceki örnekte verilen transfer fonksiyonunda s = 0'da bir kutup bulunmaktaydı. Şimdi ise bu durumu s = 0'da sıfırı olan bir sistem ile karşılaştıralım. Sistemin transfer fonksiyonu $G_3(s) = \frac{s}{(s+1)(s+2)}$ olsun. Sistemin s = 0'da bir sıfırı ve s = -1 ve s = -2'te iki kutbu vardır. Sistemin sıfır ve kutupları s-düzleminde gösterilmiştir. Bu sistemin Nyquist grafiği yine Şekil 3'te görülmektedir.

Matlab programı 5-3	**Imajiner eksen üzerinde sıfır bulunması durumunda Nyquist grafiği**
`sys2 = tf(1,[1 1 0]);`	`% transfer fonksiyonunun oluşturulması`
`figure, nyquist(sys2), axis([-2 2 -2 2])`	`% Sistemin nyquist grafiği`

`num = 1; den = [1 1 0];`
`w = 0.1:0.1:100;`
`[real, im, w] = nyquist(num,den,w);`
	`% Belli frekans bölgesi için Nyquist grafiğinin çizilmesi`

`figure, plot(real, im), axis([-2 2 -2 2])`	`% Seçilen frekans bölgesinin detaylı bir şekilde incelenmesini sağlar.`



Şekil 3: s = 0'da sıfırı olan bir sistemin incelenmesi

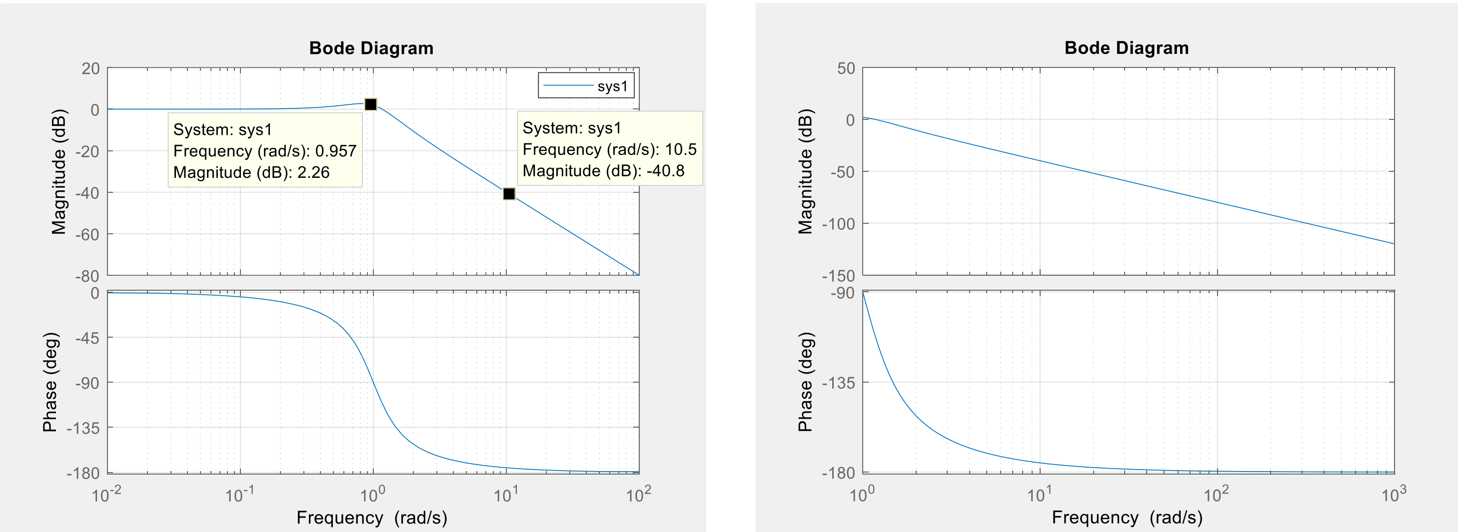
2. Bode Grafikleri

Bode grafikleri frekansın değişmesi ile kazanç ve faz bilgilerini ayrı grafikler üzerinde çizildiği analiz yöntemidir. Polar grafikler ile en önemli farklılığı yatay eksenin logaritmik skalada olmasıdır. Kazanç değeri dB cinsinden ifade edilirken faz bilgisi derece veya radyan cinsinden olabilmektedir.

Analitik olarak Bode grafiği çizerken ilk olarak transfer fonksiyonunun s^0'lı terimlerin katsayısı 1 olacak şekilde düzenlenmesi gerekmektedir. Ardından köşe frekanslarının belirlenmesi ve transfer fonksiyonundaki her terim için kazanç ve faz değerlerinin hesaplanması gerekmektedir. Hesaplanan kazanç ve faz değerleri logaritmik eksen üzerine çizilir. En son aşamada ise transfer fonksiyonunun her terimi için yapılan çizimler toplanarak sonuç elde edilir.

Bir önceki kısımda verilen transfer fonksiyonları için Bode grafikleri Matlab ile aşağıdaki şekilde çizdirilir.

Matlab programı 5-4	**Quadratik TF için Bode**
`sys1 = tf(1,[1 0.8 1]);`	`% Transfer fonksiyonunun oluşturulması`
`figure, bode(sys1), grid`	`% Bode grafiği`
`w = logspace(0,3,100);`	`% frekans değerinin belirlenmesi`
`figure, bode(sys1,w), grid`	`%Belirlenen frekans için Bode grafiği`

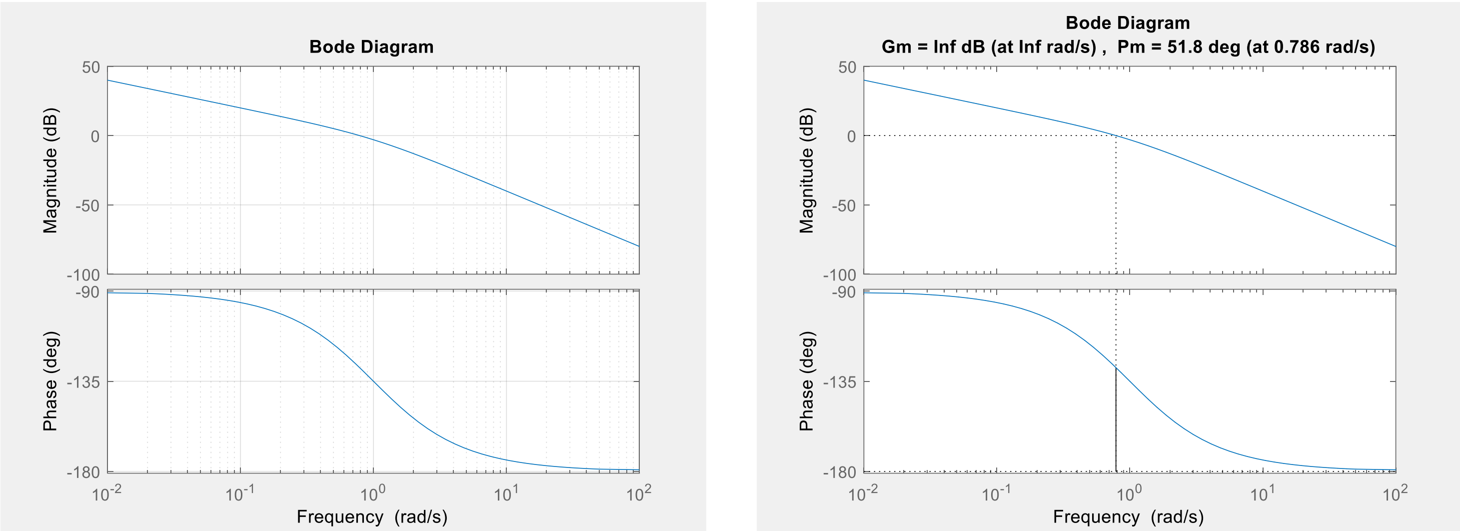


Şekil 4: Kutupları kompleks olan sistem için Bode Grafikleri

İkinci dereceden Quadratik bir sistemin Bode grafiğini çizerken kutupların reel olması durumunda çarpanlarına ayrılır ve iki tane 1. dereceden sistem olarak Bode grafiği çizilir. Kutupların kompleks olması durumda ise köşe frekansı belirlenir ve köşe frekansından sonra eğimin -40dB/dec. olacak şekilde kazan azalır. Sağda verilen grafikte ise belirlenen frekans aralığındaki kazanç ve faz değerlerinin elde edildiği grafiktir.

Matlab programı 5-5	**s = 0'da kutup olması durumu**

`num = 1; den = [1 1 0];`
`sys2 = tf(num,den);`
`figure, bode(sys2), grid`
`figure, margin(sys2)`
	`% Transfer fonksiyonunun oluşturulması`
	`% Bode grafiği`
	`% Kazanç ve faz paylarının gösterimi`



Şekil 5: s=0'da kutbu olan sistemin Bode grafiği ve Kazanç-Faz Payları

Transfer fonksiyonu $G_2(s) = \frac{1}{s^2+s}$ olan sistemin Bode grafiği Şekil 5'te gösterilmektedir. Bu sistemin s = 0'da bir kutbu olduğu için ve herhangi bir sıfırı olmadığından faz açısı -90^o'nin üzerine çıkmayacaktır. Pay ve payda arasındaki derece farkı 2 olduğundan da faz açısı -180^o'ye yaklaşacaktır ve $w = \infty$ olduğunda -180^o olacaktır. Bu sistemin kazanç ve faz payları ise sağdaki şekilde gösterilmektedir. Kazanç payı için G(jw)'nın faz açısının -180^o olduğu frekanstaki kazanç kullanılmaktadır. Faz açısı ancak $w = \infty$ olduğunda -180^o olduğundan $w = \infty$'daki kazanç değeri bize kazanç payını verecektir. $w = \infty$'da $20log|G(jw)| = -\infty$ dB olur. Bu durumda kazanç payı;

$$GM = 0 - 20log|G(jw)| = 0 - (-\infty) = \infty$$

olarak bulunur.

Faz payı için ise G(jw) genliğini 1 yapan frekans değerindeki faz açısı önemli olmaktadır. $|G(jw)| = 1$ olduğunda bu kazanç dB olarak 0'a karşılık gelir. $w = 0.786$rad/sn olduğunda genlik dB olarak 0, ve bu frekanstaki faz açısı grafikten okunduğunda,

$$\lfloor G(jw) = -\ 128^o\text{'dir.}$$

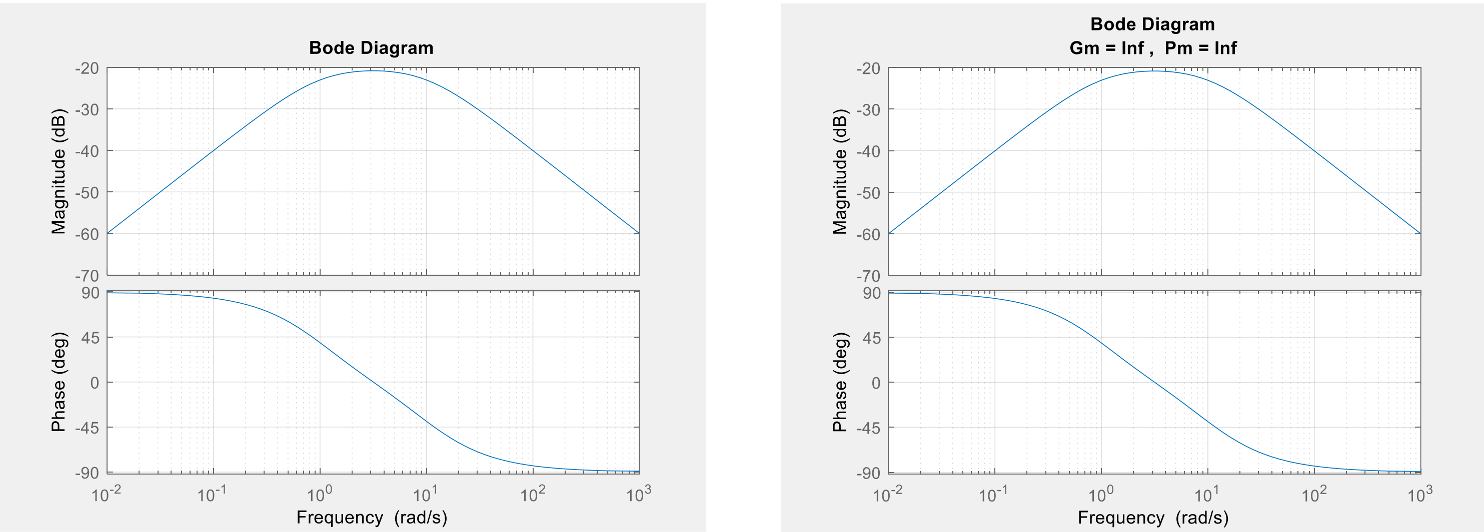
Bu durumda faz payı;

$$PM = 180 + \lfloor G(jw) = 180 - 128^o = 52^o$$

olur.

Bu defa s = 0'da sıfırı olan bir sistemin Bode grafiğini çizerek diğer durumlar ile karşılaştıralım. Sistemin transfer fonksiyonu yine $G_3(s) = \frac{s}{(s+1)(s+10)}$ olsun. Sistemin s = 0'da sıfırı olmasından dolayı +20dB/dec'lık bir eğim gözlemlenecektir. Sistemin 2 adet kutbu olduğundan -40db/dec'lık bir gelecek ve toplamda eğim -20dB/dec. olacaktır.

Matlab programı 5-6	**s = 0'da sıfır olması durumu**
`num = [1 0]; den = [1 11 10];`	% Transfer fonksiyonunun oluşturulması
`sys3 = tf(num,den);`	
`figure, bode(sys3), grid`	% Bode grafiği
`figure, margin(sys3), grid`	% Kazanç ve faz paylarının gösterimi
`[Gm,Pm,Wcg,Wcp] = margin(sys3)`	% Kazanç ve faz payı, kazanç geçiş ve faz geçiş frekans değerleri



Şekil 6: s=0'da sıfırı olan sistemin Bode grafiği ve Kazanç-Faz Payları

Bu defa Bode grafiği 0dB'lik kazanç değerini kesememiştir. Ayrıca faz grafiği incelendiğinde -180^o'lik faz değerine de ulaşamadığı görülmektedir. Bu durumda hem faz payı hem de kazanç payı ∞ olur.