Deney No: 2

Birinci ve İkinci Dereceden Sistemlerin Geçici ve Kalıcı Durum Analizleri

1. Birinci Dereceden Sistemlerin Basamak ve Dürtü Tepkileri

Zaman düzleminde diferansiyel denklemler yardımıyla gösterimi yapılan fiziksel sistemin, Laplace Dönüşümü kullanılarak s-düzleminde gösterilebileceği ve başlangıç koşullarının sıfır alınması ile çıkışın girişe oranı alınarak Transfer Fonksiyonu gösterimi yapılabileceği 1. deneyde ifade edilmişti.

Bir sistemin birden farklı şekilde gösterimleri yapılabilir; ancak aynı sistemin sadece tek bir transfer fonksiyonunu bulunur.

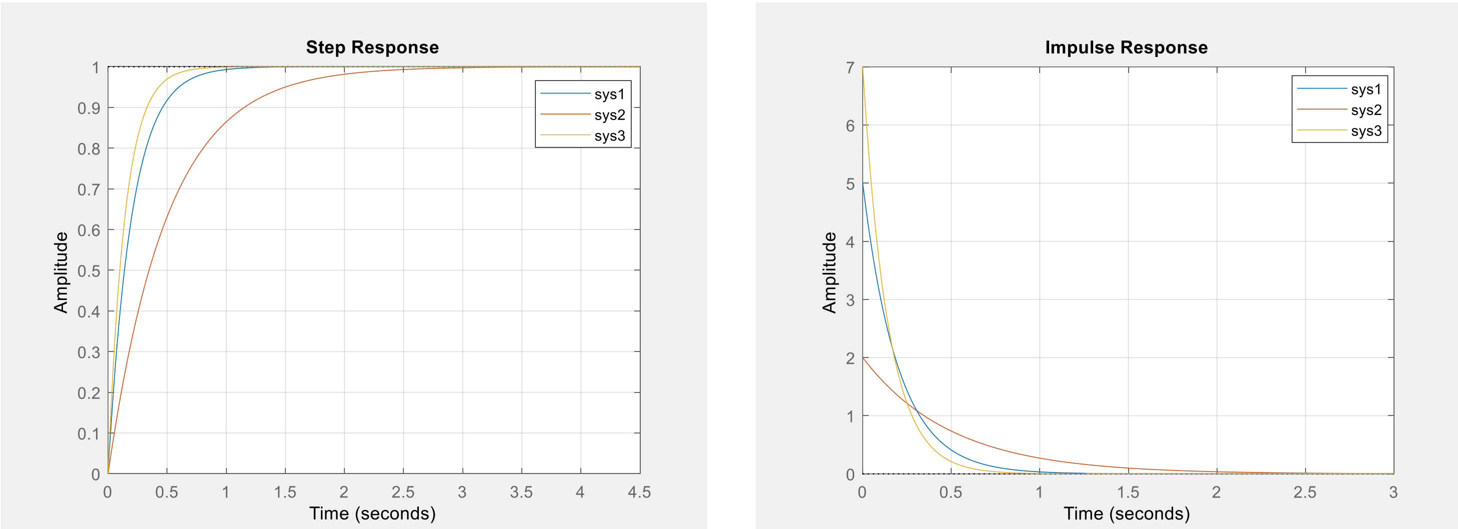
$$Transfer\ Fonksiyonu\ (TF) = G(s) = \left.\frac{L[çıkış]}{L[giriş]}\right|_{sıfır\ başlangıç\ koşulu}$$

Transfer fonksiyonu içerisinde sistemin geçici durum ve kalıcı durum tepkileri ile ilgili bilgiler içermektedir. Bu bilgiler dikkat edilirse zaman düzlemi davranışı ile ilişkili olan veriler olduğu anlaşılmaktadır. Aslında transfer fonksiyonu dolayısıyla sistemin kutup ve sıfırları kullanılarak zaman düzleminde olan davranışı yorumlanmaktadır. Bu ise kompleks olan sistemlerin davranışlarının analizinde yüksek dereceden diferansiyel denklemlerin çözümü ile sonuca gitme yerine transfer fonksiyonunun pay ve paydasının köklerinin (sistemin sıfırları ve kutupları) kullanılması ile analiz işleminin yapılacağını ifade etmektedir.

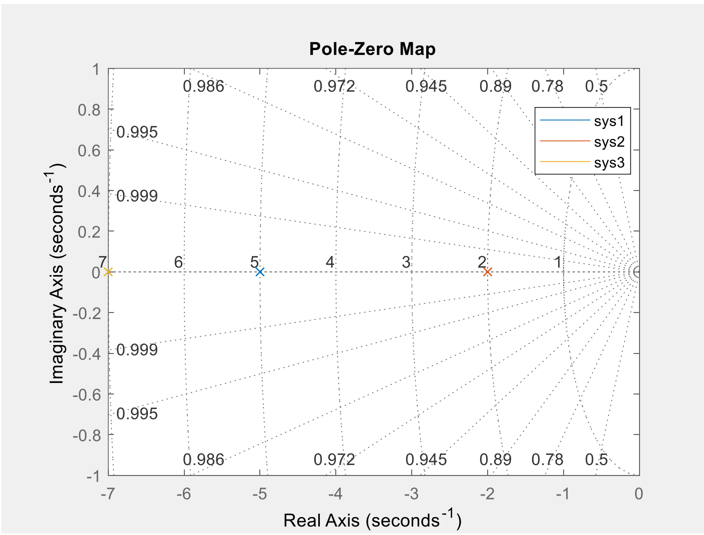
Bu deneyde birinci, ikinci ve daha yüksek dereceden sistemlerin zaman dürtü, basamak ve rampa girişler için ürettiği çıkışlar Matlab aracılığıyla hem geçici hem de kalıcı durumda hesaplamalı olarak analiz edilmesi amaçlanmaktadır. Örnek olarak aşağıda 1. dereceden bir sistemin dürtü, basamak ve rampa tepkileri incelenmiştir.

Matlab programı 2-1	**1. dereceden s dürtü ve basamak tepkileri**
>> sys1 = tf([0 5],[1 5]) sys1 = 5 ----- s + 5 Continuous-time transfer function. >> sys2 = tf([0 2],[1 2]) sys2 = 2	% Kutupları sırasıyla -5, -2, ve -7 de olan % sistemlere ait transfer fonksiyonları oluşturuldu.

-----	
s + 2	
Continuous-time transfer function.	
>> sys3 = tf([0 7],[1 7])	
sys3 =	
7	
-----	
s + 7	
Continuous-time transfer function.	
>> step(sys1,sys2,sys3), grid	% Sistemlere ait birim basamak tepkileri çizdirildi
>> figure, pzmap(sys1,sys2,sys3), grid	% Sistemlere ait kutup ve sıfırlar çizdirildi



Şekil 2.1: Birinci dereceden 3 farklı sisteme ait basamak ve dürtü tepkileri

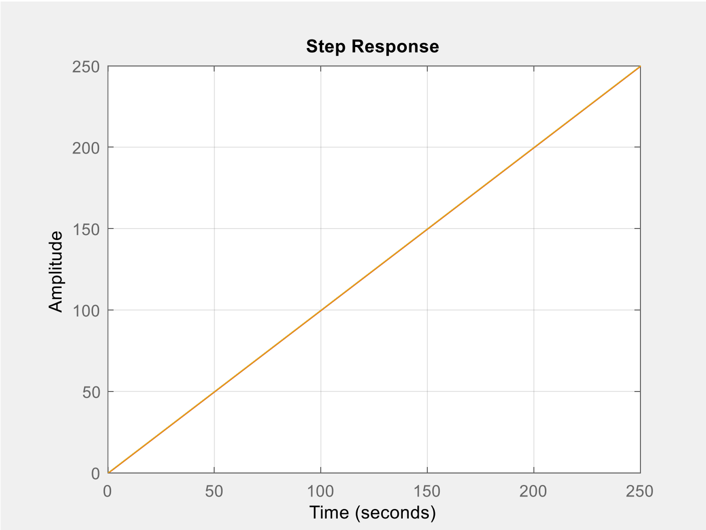


Şekil 2.2: Birinci dereceden 3 farklı sisteme ait kutup sıfır haritaları

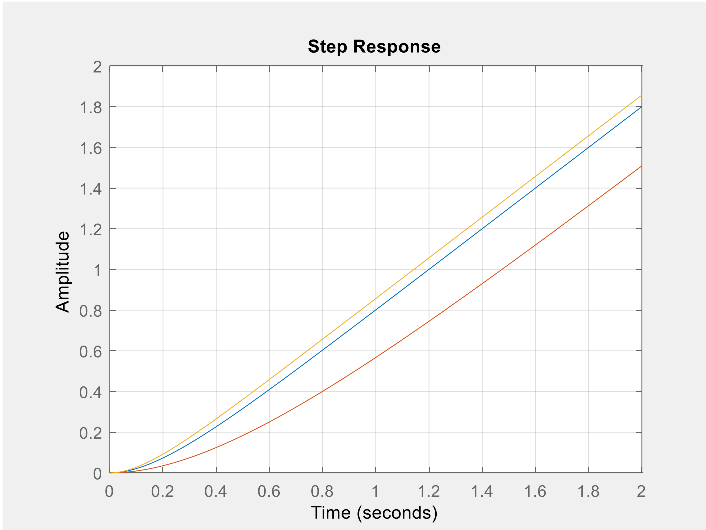
Şekil 2.1’de her 3 sisteme ait dürtü ve basamak tepkileri incelendiğinde kalıcı değere en hızlı ulaşan sistemin sarı renkle gösterilen 3. sistem olduğu görülmektedir. Bu durum sistemlerin kutup-sıfır haritalarının gösterildiği Şekil 2.2’de incelendiğinde hızlı olan sistemin kutbunun imajiner eksenden uzakta olduğu görülmektedir. Bu da bize 1. dereceden sistemlerin kutuplarının sanal eksen yakın olması durumunda bu sistemlerden hızlı bir tepki elde edemeyeceğimizi göstermektedir.

Bu defa aynı sistemlerin birim rampa tepkileri incelensin. Birim rampa giriş fonksiyonu zaman düzleminde $r(t) = t.u(t)$ ve s – düzleminde ise $R(s) = \frac{1}{s^2}$ olduğu bilinmektedir. Bu durumda sistemlerin çıkışları s-düzleminde $R(s) = G(s).\frac{1}{s^2}$ biçiminde ifade edilir. Matlab’da step komutu kullanarak sistemin rampa tepkisi çizdirilmek istenirse sistemin transfer fonksiyonunu yani $G(s)$’i $\frac{1}{s}$ ile çarparak bu işlem gerçekleştirilebilir.

Matlab programı 2-2	**1. dereceden sistemlerin rampa tepkileri**
>> sys1_r = tf(5,[1 5 0])	% Birinci dereceden 3 farklı
sys1_r =	%sisteme ait sistemin rampa
5	%tepkisi step komutuyla
---------	%çizdirileceğinden sistemlerin
s^2 + 5 s	%transfer fonksiyonları 1/s ile
Continuous-time transfer function.	%çarpıldı. %Bu sistemleri sysi_r
>> sys2_r = tf(2,[1 2 0])	%olarak kaydedildi. Burada i
sys2_r =	%sisteme ait sayıyı
2	%göstermektedir.
---------	
s^2 + 2 s	
Continuous-time transfer function.	
>> sys3_r = tf(7,[1 7 0])	
sys3_r =	
7	
---------	% Sistemlerin rampa tepkileri
s^2 + 7 s	%grafik üzerinde elde edilir.
Continuous-time transfer function.	% Eksenler yeniden
>> figure, step(sys1_r,sys2_r,sys3_r), grid	%boyutlandırıldı.
>>axis([0 2 0 2])	
>>t = 0:0.5:2;	% Giriş fonksiyonun oluşturulması
>>hold on	%ve grafik %üzerinde gösterilmesi.
>>plot(t,t,'ro')	



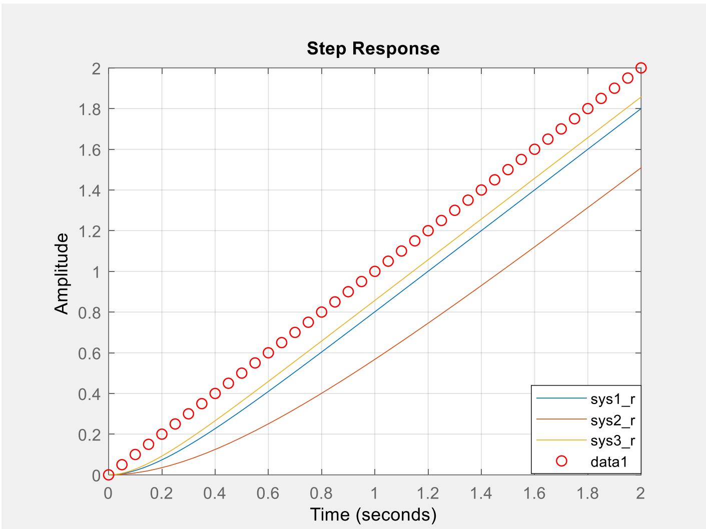
(a)



(b)

Şekil 2.3: Sistemlere ait rampa tepkileri

Şekil 2.3.a’da zamanın 250 saniyeye kadar ulaştığı görülmektedir. Çözünürlüğün düşük olması sistem tepkisinin detaylı incelenmesinin önüne geçmektedir. Şekil 2.3.b’de çözünürlük düşürülmüş ve sistem tepkileri detaylı olarak gösterilmiştir.



Şekil 2.4: Sistemlere ait rampa tepkilerinin giriş ile karşılaştırılması

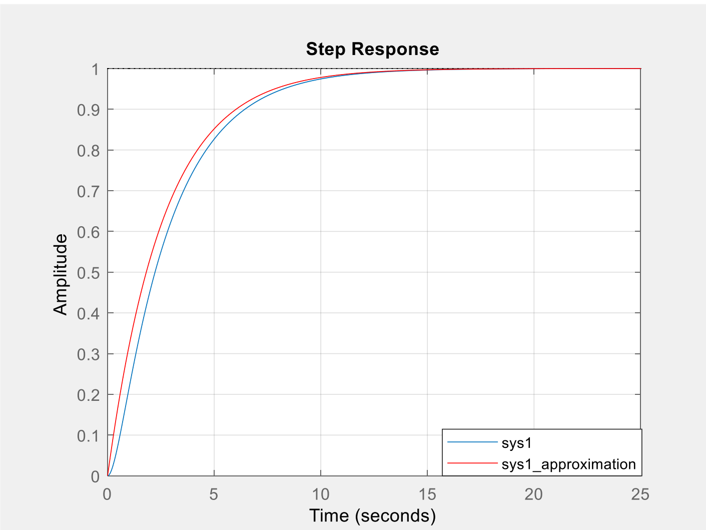
2. İkinci Dereceden ve Daha Yüksek Dereceden Sistemlerin Basamak Tepkileri

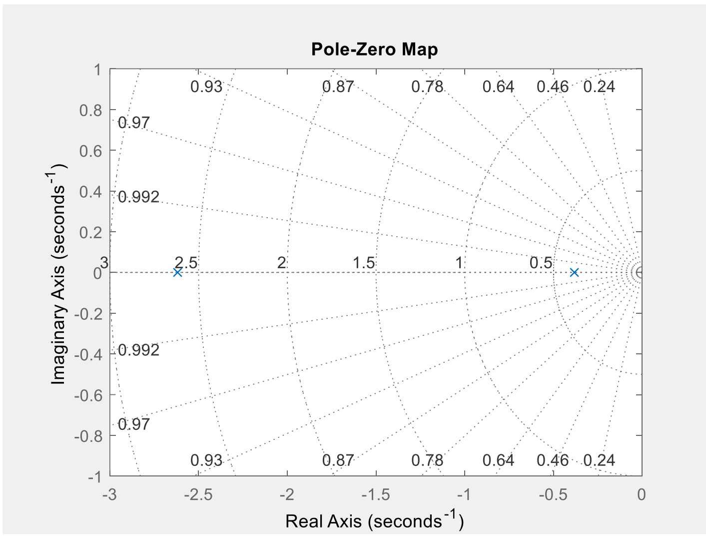
İkinci dereceden bir sisteme ait transfer fonksiyonu en genel biçimde $G(s) = \frac{w_n^2}{s^2+2\xi w_n s+w_n^2}$ biçiminde olduğu bilinmektedir. Burada $w_n\,(rad/sn)$ doğal frekansı gösterirken, ξ sönümlenme katsayısını belirtmektedir. Sönümlenme katsayısının aldığı değere göre sistem çıkışındaki tepkinin Aşırı Sönümlü ($\xi > 1$), Kritik Sönümlü ($\xi = 1$) ve Yetersiz Sönümlü (Titreşimli) ($0 < \xi < 1$) olacağı belirlenir. Bu 3 durumda kutupların s-düzleminde sol yarı düzlemde olduğu ve sırasıyla birbirinden farklı ve gerçek, katlı, kompleks eşlenik olduğuna dikkat edilmelidir.

Matlab programı 2-3	**2. dereceden sistemlerin basamak tepkileri**

`w_n = 1;`
`psi = 1.5;`
`sys1 = tf(w_n^2,[1 2*psi*w_n w_n^2]);`
`figure, step(sys1), grid figure,`
`pzmap(sys1), grid`
`a = [1 2*psi*w_n w_n^2];`
`roots(a);`
`sys1_approximation = tf(-max(roots(a)),[1 -max(roots(a))]);`
`figure(1), hold on,`
`step(sys1_approximation,'r')`
	% Aşırı sönümlü durum w_n = 1, $\xi = 1.5$
	% Aşırı sönümlü sistemin basamak tepkisi
	% Baskın kutuplar ele alındığında elde edilen basamak tepkisi

Yukarıda verilen aşırı sönümlü durum için basamak tepkisi ve kutup sıfır grafiği Şekil 2.5'te gösterilmektedir. Ayrıca sistemin baskın kutupları ele alınarak sistem 1. Dereceden bir sistem gibi düşünüldüğünde elde edilen basamak tepkisi grafik üzerinde kırmızı renkte gösterilmiştir. Bilindiği gibi sistemin baskın kutupları imajiner eksene yakın olan kutuplarıdır.

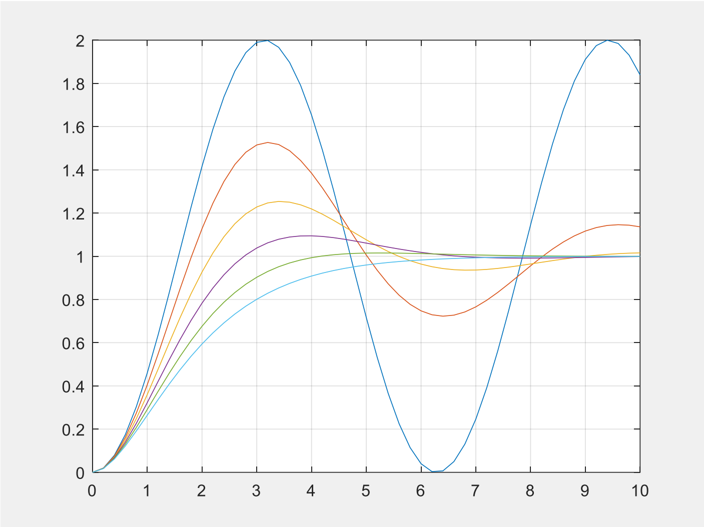




Şekil 2.5: Aşırı sönümlü durum için 2. dereceden sistemin basamak tepkisi

Matlab programı 2-4	**2. dereceden sistemlerin basamak tepkileri**

`w_n = 1;`
`psi = [0 0.2 0.4 0.6 0.8 1];`
`t = 0:0.2:10;`
`for n = 1:6`
`    num = w_n^2;`
`    den = [1 2*psi(n)*w_n w_n^2];`
`    [y(1:size(t,2),n),x,t] = step(num, den, t);`
`end`
`plot(t,y), grid`
	`% Farklı psi değerlerinin belirlenmesi`
	
	`%Psi değerleri için sitemin basamak tepkilerinin elde edilmesi ve çizdirilmesi`



Şekil 2.6: Kritik sönümlü ve yetersiz sönümlü sistemlerin basamak tepkileri

2-4' te verilen kod ile, sönümlenme katsayıları sırasıyla 0 0.2 0.4 0.6 0.8 ve 1 olan, doğal frekansı w_n = 1 rad/sn olan sistemlerin basamak tepkilerinin çizdirilmesi için kullanılmaktadır. Burada dikkat edilirse sönümlenme katsayısı azalıkça sistemin titreşiminin arttığı ve $\xi = 0$ olduğunda ise sistemin kutuplarının tamamen kompleks olduğu dolayısıyla tamamen sinüsoidal bir tepki verdiği görülmektedir.

Kompleks sistemlerin modellenmesinde tüm koşullar göz önüne alınması durumunda sistemin derecelerinin artacağı bilinmektedir. Bununla birlikte sistemin teorik olarak analiz edilmesinde de zorlukların yaşanacağı açıktır. Fakat simülasyon ortamında sistemin derecesinin artması sistemin basamak, dürtü veya farklı girişler için üreteceği çıkışlarda bir probleme sebep olmayacaktır. Sistemin davranışı tamamen sistemin transfer fonksiyonuna bir başka deyişle sistemin kutup ve sıfırlarına bağlıdır.

Örnek 1:

Aşağıda 2 giriş ve 2 çıkışlı bir sisteme ait durum uzay gösterimi verilmiştir. Bu sistemin farklı iki çıkış için her bir girişe göre ayrı ayrı transfer fonksiyonu olacaktır. Dolayısıyla sistemin transfer fonksiyonları $\frac{Y_1(s)}{U_1(s)}, \frac{Y_2(s)}{U_1(s)}, \frac{Y_1(s)}{U_2(s)}\ ve\ \frac{Y_1(s)}{U_2(s)}$ olacağından bu sistemlerin ayrı ayrı basamak tepkilerini incelemek gerekmektedir.

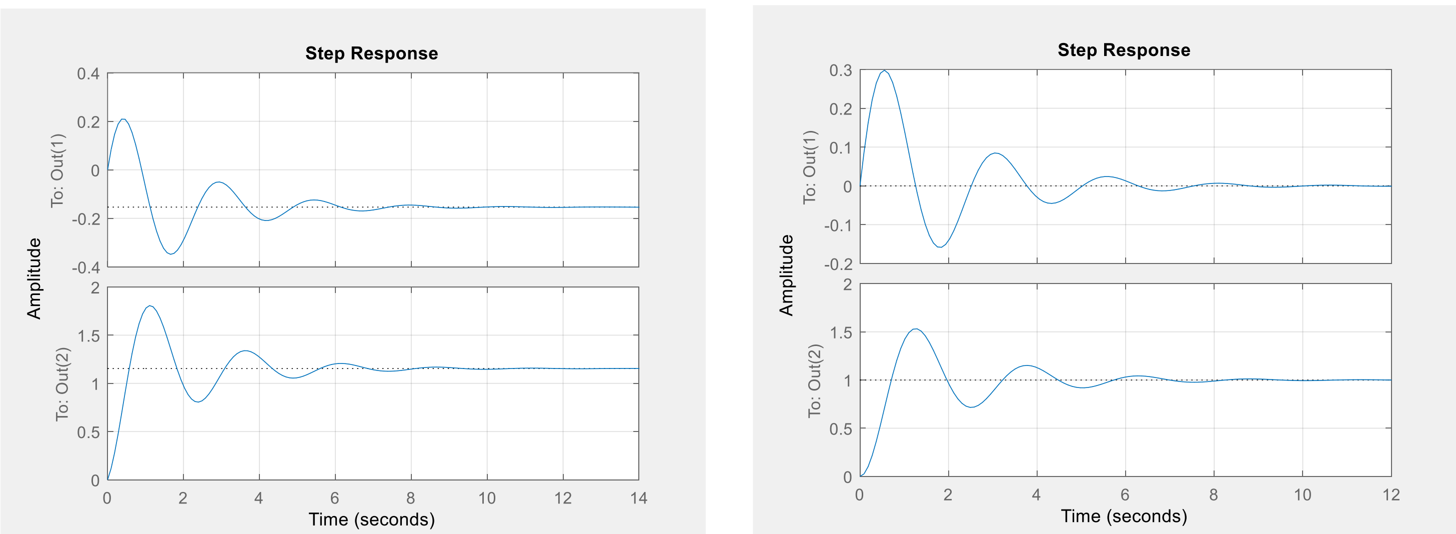
$$\begin{bmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 6.5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

Bu gösterimde A, B, C ve D matrisleri bilindiğinden Matlab ile transfer fonksiyonları hesaplanabilir.

Matlab programı 2-5	**2 giriş 2 çıkışlı sistem**

`A = [-1 -1;6.5 0];`
`B = [1 1;1 0];`
`C = [1 0;0 1];`
`D = [0 0;0 0];`
`step(A,B,C,D,1), grid`
`figure, step(A,B,C,D,2), grid`
	`%u1 girişine göre y1 ve y2 çıkışları için sistemin basamak tepkileri`
	
	`%u2 girişine göre y1 ve y2 çıkışları için sistemin basamak tepkileri`



Şekil 2.5: Verilen sisteme ait çıkışların 2 girişe göre basamak tepkileri

Önhazırlık Çalışması:

1. 1. dereceden sistemlerin kutuplarının sanal eksen yakın olması durumunda bu sistemlerden hızlı bir tepki beklenemeyeceği deneyde belirtilmiştir. Teorik olarak böyle bir sistemin kutbunun sanal eksen üzerinde olması durumunda nasıl bir basamak ve dürtü tepkisi elde edileceğini gösteriniz. Bulduğunuz sonucu Matlab yardımıyla da elde ediniz.
2. Deney föyünde verilen birinci dereceden sistemlerin dürtü, basamak ve rampa girişler için ürettikleri <u>hataları</u> elde ediniz. Matlabda her farklı giriş için farklı grafik üzerinde hata grafiklerini zaman düzleminde çizdiriniz. ($Hata = Referans(Giriş) - Çıkış$)
3. Bir sistemin $s = 0.5$'te bir adet sıfırı ve $s_{1,2} = -0.5 \pm j\frac{\sqrt{3}}{2}$ 'de ise kutuplarının olduğu bilinmektedir. Verilen bu sistemin;
   a. Doğal frekansını, sönümlenme katsayısını hesaplayarak hangi duruma karşılık geldiğini belirleyiniz.
   b. Sistemin dürtü, basamak ve rampa tepkilerini Matlab ile zaman düzleminde çiziniz.
   c. Bu sistemin basamak tepkisini zaman düzleminde teorik olarak elde ediniz.
   d. Sistemin herhangi bir sıfırı olmaması durumunda basamak tepkisini zaman düzleminde teorik olarak elde ediniz.
   e. (d) şıkkında belirtilen durumu Matlab ile simülasyonunu yapınız ve iki sistemi aynı grafik üzerinde çizdiriniz.
4. Örnek 1 de verilen sisteme ait durum uzay gösteriminde y_1 ve y_2 çıkışları için u_1, u_2 girişlerine göre transfer fonksiyonunu elde ediniz. Bu sistemlerin birim basamak tepkilerini zaman düzleminde çıkarınız.
5. Şekil 2.7'de verilen basamak tepkilerinin hangi çıkış ve hangi girişe ait olduğunu sebebini de belirterek (4. soruda bulduklarınızı kullanarak) belirleyiniz.
6. Matlab'da lsim komutunun nasıl kullanıldığını araştırınız. 3. sorunun (b) şıkkında istenen çizimleri bu komutu kullanarak belirlediğiniz zaman aralığı için çizdiriniz.

Deney Adımları:

1. Aşağıda özellikleri verilen 2. dereceden sisteme ait transfer fonksiyonunu elde ediniz ve Matlab'da bu sistemi oluşturunuz.
   - Sönümlenme katsayısı 0.6
   - Doğal frekansı 5 rad/sn
2. Bu sistemin basamak tepkisini (0-5) saniye aralığında çizdiriniz.
3. Geçici durum performans kriterlerini grafik üzerinden okuyup not ediniz.

Maksimum Aşma	Yerleşme Zamanı	Tepe Zamanı	Yükselme Zamanı	Gecikme Zamanı

4. Grafikten okuduğunuz geçici durum performans kriterleri tanımlarını hatırlayarak gerekli kodları yazarak Matlab'dan algoritma ile elde ediniz.
5. Aynı sisteme ait aşağıda verilen girişler için oluşacak olan sistemin tepkisini ve giriş fonksiyonunu zaman düzleminde çizdiriniz.
   a. $r(t) = t.u(t)$
   b. $r(t) = e^{-t}u(t)$ (Not: lsim komutunun kullanımını inceleyiniz.)